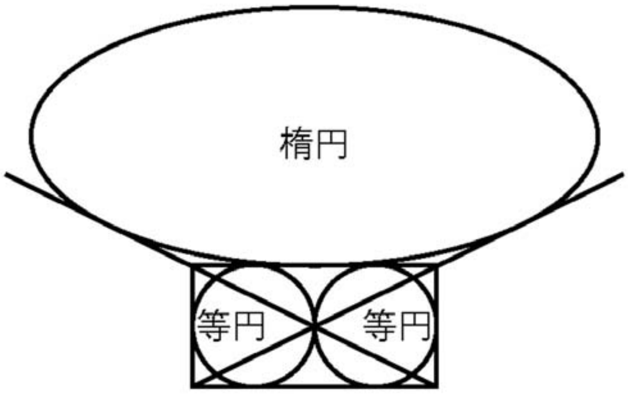
上級問題（高校生以上向け）

弘化 4 年(1847)に春日神社(一関市萩荘)に奉納された算額の問題です。



長方形内に等円が 2 個内接し、図のように長方形の上に楕円がのっています。このとき長方形の 2 本の対角線を延長すると楕円の接線になりました。楕円の長軸の長さを求めて下さい。

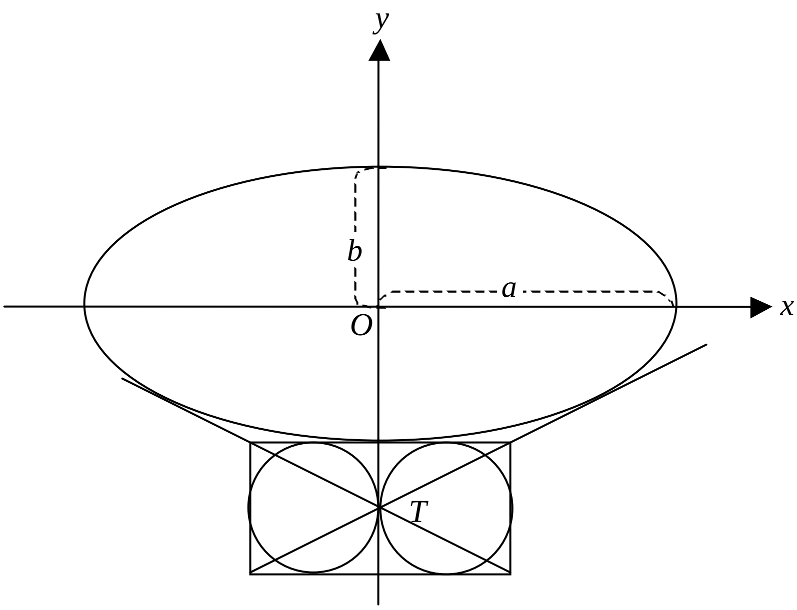
但し、楕円の短軸の長さと等円の直径は与えられているとします。

審査員講評

上級は、高校 1 年生から 87 歳の方まで 64 名の方から解答をいただきました。正解者は 42 名(65.6%)でした。ただし、長軸の長さを解答していないものは正解としませんでしたので、最後の符合間違い、また書き間違いなどを含めると実質的な正解に達した人は 53 名(82.5%)になります。解答の大多数は楕円と直線が接する条件である 2 次方程式の判別式が 0 となることを用いたものでした。また、ほぼ全員が座標を入れた解析幾何での解答でした。

中には、アファイン変換を用いる解答 3 種や、極と極線の関係を利用するものなど、深い考察に感心致しました。

【解答例 1】



楕円の長径の長さを$2a$,短径の長さを$2b$,等円の半径をrとする.
図のように座標軸を定めると
楕円の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots ①$$

斜線lの傾きは$\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$
対角線の交点をTとおくと,
$T(0,-b-r)$である.

従って,lの方程式は, $y=\frac{1}{2}x-(b+r) \cdots ②$

②を①に代入してyを消去すると,

$$b^2x^2+a^2\left\{\frac{1}{2}x-(b+r)\right\}^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2\left\{\frac{1}{4}x^2-(b+r)x+(b+r)^2\right\}=a^2b^2$$

$$\therefore \frac{a^2+4b^2}{4}x^2-a^2(b+r)x+\cancel{a^2b^2}+2a^2br+a^2r^2=\cancel{a^2b^2}$$

従って $\frac{a^2+4b^2}{4}x^2-a^2(b+r)x+2a^2br+a^2r^2=0 \cdots ③$

①と②が接するから③の判別式$D=0$となる.

すなわち $D=a^4(b+r)^2-4\times\frac{a^2+4b^2}{4}\left(2a^2br+a^2r^2\right)=0$

$$\therefore a^4b^2+\cancel{2a^4br}+\cancel{a^4r^2}-\cancel{2a^4br}-8a^2b^3r-\cancel{a^4r^2}-4a^2b^2r^2=0$$

$$\therefore a^4b^2-8a^2b^3r-4a^2b^2r^2=0$$

a^2b^2でわると

$$a^2-8br-4r^2=0$$

$a^2=8br+4r^2$ $\therefore a=\sqrt{8br+4r^2}$ $(a>0$より$)$

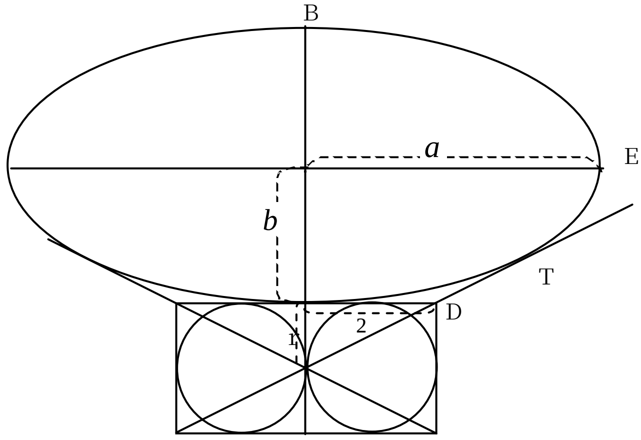
従って $2a=2\sqrt{2\cdot 2b\cdot 2r+(2r)^2}$

すなわち 長軸の長さ $2a=2\sqrt{2\times \underset{\text{短軸の長さ}}{\underset{\parallel}{短径}}\times \underset{\text{円の直径}}{\underset{\parallel}{円径}}+円径^2}$

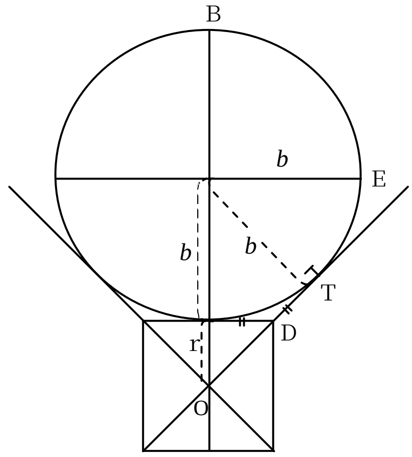
$$=2\sqrt{(2\cdot 短径+円径)\cdot 円径}$$

【解答例 2】

第 1 図



第 2 図



等円の半径をr,楕円の半径を$2b$とし、
第1図のように記号をつけておく.
楕円の短軸を基線として,この図を長軸の方向に
$\dfrac{b}{a}$倍に縮小(または拡大)すると楕円は円になる(第2図).
点EはE'に移り、接点TはT'に、点DはD'に移る.このとき

$$AD' = \frac{b}{a}AD = \frac{2br}{a},$$

ゆえに第2図で

$$OD' = \sqrt{OA^2 + AD'^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{2br}{a}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{a}r$$

また$D'T'$,$D'A$はともにD'から円への接線だから長さは等しい.
すなわち

$$D'T' = AD' = \frac{2br}{a}$$

そして$OC = b + r, CT' = b,$

$$OT' = OD' + D'T' = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{a}r + \frac{2br}{a}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2b\right)r}{a}$$

ゆえに直角三角形OCT'に三平方定理を用いて

$$(b + r)^2 = b^2 + \frac{\left(\sqrt{a^2 + 4b^2} + 2b\right)^2 r^2}{a^2}$$

ここでbとrは与えられているからaを未知数として解けばよい.
(または$OT'^2 = OB \cdot OA$を利用してもよい)少し途中の計算を示すと

$$a^2\left(2br + r^2\right) = \left(a^2 + 4b^2 + 4b\sqrt{a^2 + 4b^2}\right)r^2$$

整理して両辺を共通因子$2br$で割ると,

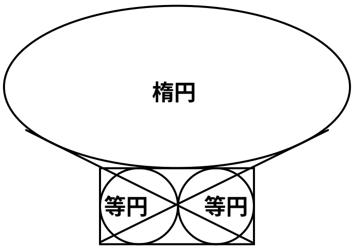
$$2r\sqrt{a^2 + 4b^2} = a^2 - 4br$$

平方して$4r^2\left(a^2 + 4b^2\right) = a^4 - 8a^2br + 16b^2r^2$
整理して共通因子a^2で割って,$4r^2 = a^2 - 8br, \therefore a^2 = 4r(2b + r)$
よって$a = 2\sqrt{r(2b + r)}$,長軸 $= 2a$,短軸 $= 2b$,等円径 $= 2r$で表わせば

$$(2a) = 2\sqrt{(2r)\left[2(2b) + (2r)\right]} \qquad \text{(答)}$$

解説

実際の春日神社に奉納された算額には、次のように書かれています。



今有如図直内容等円二ケ設二斜相錯載側円其
短径及等円径若干問得側円長径術如何
答曰如左文
術曰置短径倍之加等円径乗等円径開平方二之
得長径合問

（現代訳）

今、図のように長方形(直)の中に等円を二個いれて、二本の斜線を交叉させ楕円(側円)を載せる。
その短径及び等円の直径(径)を若干とするとき、側円の長径を求める術はどのようなものか。

答　左の文のとおり

術　短径を置き、これを 2 倍し、等円径を加える。これに等円径をかけて平方に開き 2 倍すれば長円径を得て、問いに合う。

この問題の解義書（和算家による解答をまとめた書物）は見つかっていないので、当時の奉額者がどのようにして解いたのかは不明です。

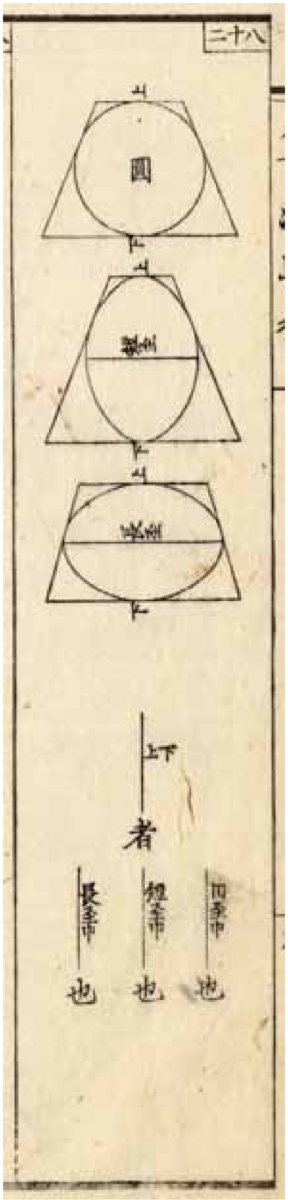
算額の術文には、

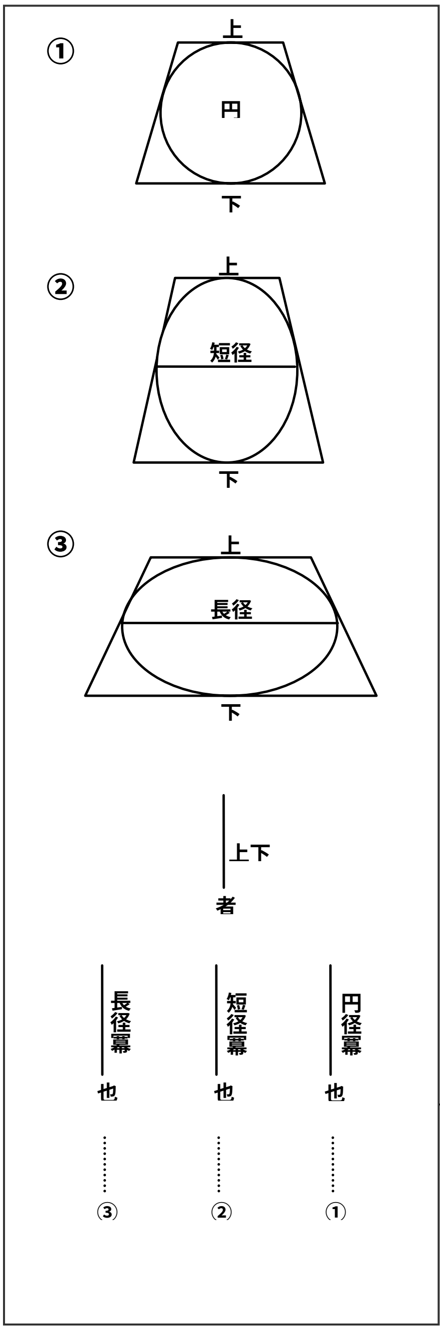
$$\text{楕円の長径} = 2\sqrt{\left(\text{短径} \times 2 + \text{円の直径}\right) \times \text{円の直径}}$$

とあります。

江戸時代の我国では、解析幾何学は使われていませんでした。ではどのようにして解いたのでしょう。次のような和算公式を使った解答が考えられます。

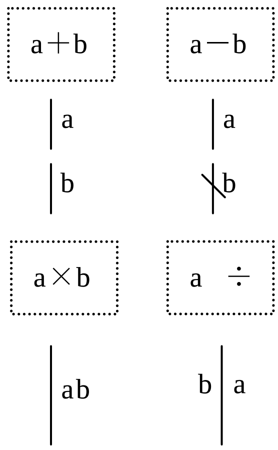
『算法助術』（長谷川弘校閲　山本賀前編）という本は、和算の公式集で、その 82 に３つの公式が紹介されています。





和算の式　「点竄術」

関孝和が考案した方程式の表現方法。傍書法ともいいます。



「冪(べき)」は、2 乗することです。

ここは、上のそれぞれの図について各部分の関係を表わした和算の式です。

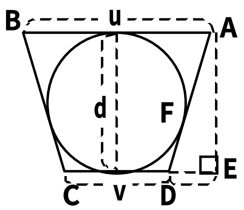
①上 · 下 = 円径^2

②上 · 下 = 短径^2

③上 · 下 = 長径^2

これを利用して解くことができます。(1)(2)を解いて(3)の解を得ます。

(1)



$d^2 = uv$

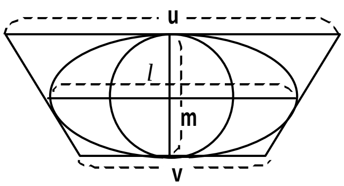
なぜなら斜辺$AD = AF + FD = \frac{u}{2} + \frac{v}{2}$

また　$DE = \frac{u-v}{2}$

ゆえに三平方の定理から

$d^2 = AE^2 = AD^2 - DE^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv$

(2)



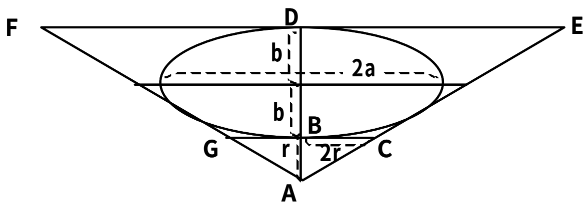
u, vを上底, 下底とする等脚台形に内接する楕円の長軸、短軸の長さをそれぞれl, mとする.

この楕円を長軸方向に$\frac{m}{l}$の比に縮めると楕円は円に変わる.

その直径はmである. また, 台形の上底, 下底はそれぞれ$\frac{m}{l}u, \frac{m}{l}v$となるから(1)のことから

$m^2 = \frac{m}{l}u \cdot \frac{m}{l}v$　　ゆえに$l^2 = uv$

(3)



等円の半径を r, 楕円の長軸の長さを $2a$, 短軸の長さを $2b$とする.

上図で $FE \mathbin{//} GC$だから

$\frac{FE}{GC} = \frac{DE}{BC} = \frac{DA}{BA} = \frac{2b+r}{r}$,　そして $GC = 4r$

ゆえに $FE = 4(2b+r)$となる, 等脚台形 $CEFG$ に(2)を用いると ,

$u = FE = 4(2b+r), v = 4r, l = 2a$

としてよいから

$(2a)^2 = 4(2b+r) \cdot 4r$

$\therefore a^2 = 4r(2b+r)$

$\therefore (2a) = 2\sqrt{(2r)[2 \cdot (2b) + (2r)]}$