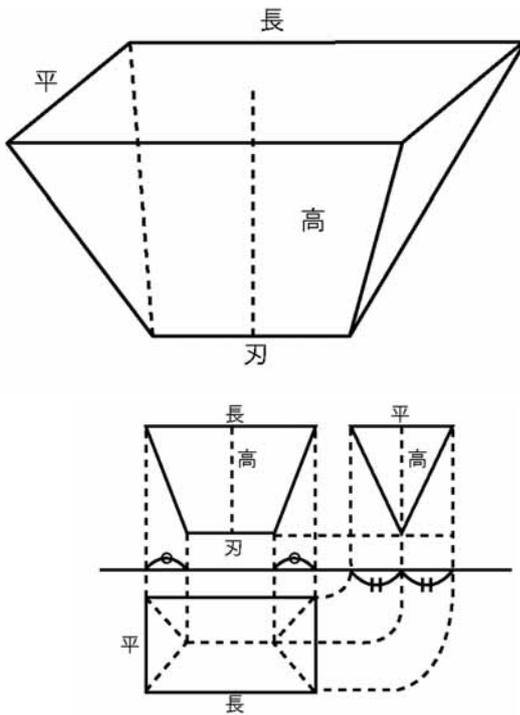


中級問題
(中学生以上向け)

『算法新書』(千葉胤秀編、文政13年(1830)刊行)巻の二にある問題です。



上面が長方形の図のような^{くまびがな}楔形があります。

(1)長、平、刃、高を使って、この楔形の体積を求める公式を作って下さい。

(2)長の長さ 12cm、平の長さ 7cm、刃の長さ 6cm、高の長さ 8cmの時、(1)で作った公式を用いてこの楔形の体積を求めて下さい。

(参考)

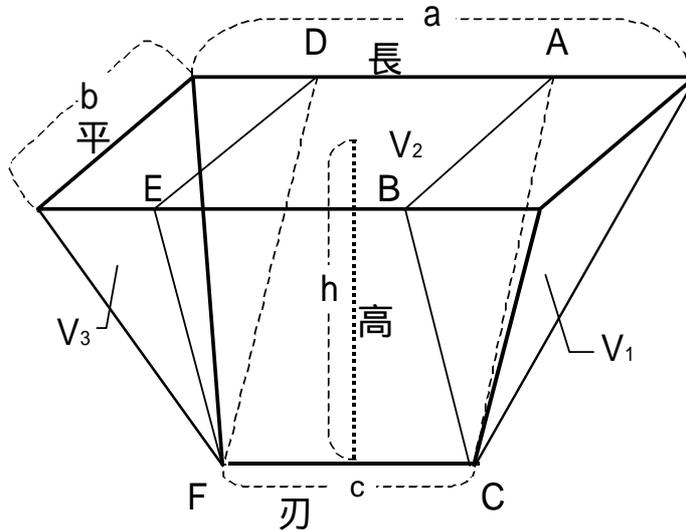
この楔形の平面図、立面図、側面図は図のとおりです。

審査員講評

中級問題へは 128 の解答をいただきました。問題は、前半が楔形の公式を使って体積を求めることでした。前半の公式を作る過程が全く無く公式のみを示した解答が意外と多く約 2 割もありましたが、式は正しくても不正解としました。題意をしっかりと把握することが基本となります。公式は殆どが角錐を角柱に分割し統合するもので、図や説明にそれぞれの工夫がみられました。分割以外では、一人で複数の解答を提出していただいた中に、積分によるもの 8 件、重心、シン普森公式の援用が各 1 件ありました。まとめの段階でもう一步の解答も多々ありましたが式が合っていれば正解としました。後半の数値計算では前半できちとした公式を導いた場合は、まず誤りはありませんでした。練り上げ不足を反映した、符号、数値代入のミスがみられました。

解答と併せて問題毎の感想文も多く寄せられ楽しく拝見しました。案外難しかったけれども自分の力で成し遂げた喜びが伝わってくる内容には本当に嬉しく思いました。中には案外簡単だったとみくびって誤った結果を導いたのもあり油断大敵、念には念を入れが基本ということになりましょうか。問題を解く過程に創意工夫の喜び、そして若干の遊び心があれば「挑戦」への味付けが更に増すのではと思いました。

【解答例】



(1) 長 = a , 平 = b , 刃 = c , 高 = h とおく

図のように、上面に垂直で刃の両端をとる平面で楔形を切り
3つの部分に分けて、その体積を V_1, V_2, V_3 とする。

ここで $V_1 = V_3$

$$V_1 = \frac{a-c}{2} \cdot bh \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(a-c)bh = V_3$$

$$V_2 = \triangle ABC \times AD = \frac{AB \times h}{2} \cdot AD = \frac{1}{2}bhc$$

従って求める楔形の体積を V とすれば

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 = 2V_1 + V = \frac{1}{3}(a-c)bh + \frac{1}{2}bhc \\ &= \frac{1}{6}(2a - 2c + 3c)bh \\ &= \frac{1}{6}(2a + c)bh \end{aligned}$$

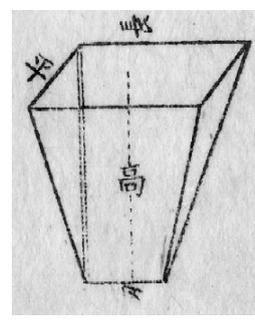
すなわち 楔形の体積 = $\frac{1}{6}(\text{長} \times 2 + \text{刃}) \cdot \text{平} \cdot \text{高}$

$$(2) \text{ 楔形の体積} = \frac{1}{6}(2 \times 12 + 6) \times 7 \times 8$$

$$= \frac{1}{6} \times 30 \times 7 \times 8 = 280(\text{cm}^3) \cdots (\text{答})$$

解説

この問題が掲載されている『算法新書』巻の二の原文をみてみましょう。

	 <p data-bbox="1292 403 1404 481">楔 けつ</p> <p data-bbox="1228 683 1284 1153">長一尺二寸平七寸刃六寸</p> <p data-bbox="1133 683 1189 1030">高八寸積何程と問</p> <p data-bbox="1037 683 1093 996">答積二百八十歩</p> <p data-bbox="829 347 1005 1120">術曰長一尺二寸を倍して刃六寸を加平七寸を懸け又高八寸を懸定法六を以て割積を得</p>
--	--

『算法新書』巻の二は、「求積」の項となっており、面積や体積を求め方を解説した部分です。この中に楔形(原本では、「楔(けつ)」)の体積の求め方があります。現代的に訳すと次のようになります。

長さ1尺2寸、平7寸、刃6寸、高さ8寸。体積はいくらか。

答え 体積は、280歩

その方法(術)は、長さ1尺2寸を2倍して、刃6寸を加え、平7寸をかけ、高8寸をかけ、定法6で割って積を得る。

最後の解き方(術)の部分の数式で表すと

$$\text{楔の体積} = (12 \times 2 + 6) \times 7 \times 8 \div 6$$

つまり

$$\text{楔の体積} = \frac{1}{6}(\text{長} \times 2 + \text{刃}) \cdot \text{平} \cdot \text{高}$$

となっており、当時、楔の体積の公式は知っていたと思われます。