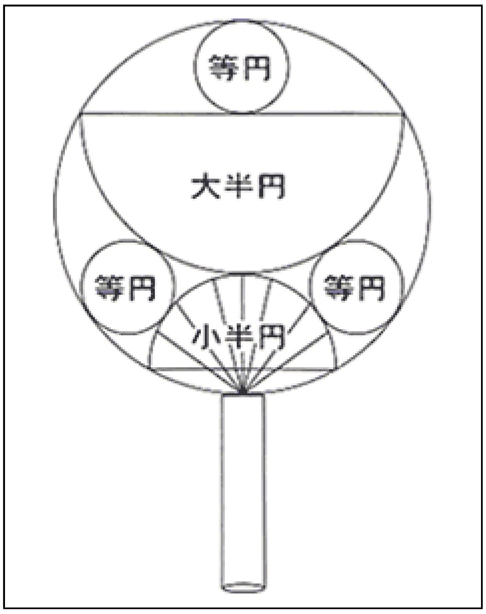
<table>
<tr>
<td>上級問題
(高校生以上向け)</td>
<td>

明治25（1892）年に清水寺（花巻市）に奉納された算額の問題です。

　円形のうちわの中に、大小２つの半円と３個の等円が図のように接しています。
　等円の直径が５㎝のとき、うちわの直径を求めてください。</td>
</tr>
</table>

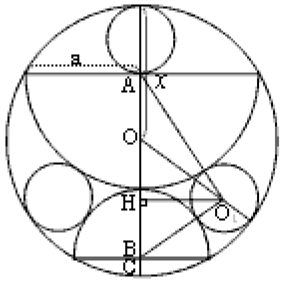
審査員講評

　上級は中学１年生から８１歳まで６３名の方から７２件の応募をいただきました。正解者は３６件（５０％）でした。結果のみ記載されているものや結果が合っていても途中の導き方に間違いが見られるものは正解とはしませんでした。正答の大多数は、うちわ、小半円、一つの等円のそれぞれの中心からなる三角形が二等辺三角形となることを用いたものでした。座標を導入して手際よく解いている方も数名おりました。また、大半円、小半円、等円のそれぞれの中心を結んでできる三角形に余弦定理を使って導き出している方もおりましたが、その計算力には感服する思いでした。
　賞候補の選定には、できるだけ新人をと考えましたが、結局論理と仕上げの素晴らしい解答をされた方を選びました。
　挑戦者の皆様の熱意と根気に敬意を表します。

解答例

【解答例１】三平方の定理と方べきの定理を用いた解

団扇の半径を$x$cmとし、大半円、小半円の半径をそれぞれ$a$cm、$b$cmとおくと、



$a^2=5(2x-5)$　　∴ $a=\sqrt{5(2x-5)}$…①

$b^2=c(2x-c)$　　∴ $c=x-\sqrt{x^2-b^2}$…②

(ただし、団扇の軸央端と小円径の弦の距離を$c$cmとする。図参照)

次に、$2x=5+a+b+c$であるから

$$2x=5+\sqrt{5(2x-5)}+b+x-\sqrt{x^2-b^2}$$

$$\sqrt{x^2-b^2}=b+\{5-x+\sqrt{5(2x-5)}\}$$

両辺を平方して

$$x^2-b^2=b^2+2\{5-x+\sqrt{5(2x-5)}\}\cdot b+\{5-x+\sqrt{5(2x-5)}\}^2$$

$$2b^2+2\{5-x+\sqrt{5(2x-5)}\}b-x^2+(5-x)^2+2(5-x)\sqrt{5(2x-5)}+5(2x-5)=0$$

$$\therefore\ b^2+\{5-x+\sqrt{5(2x-5)}\}b+(5-x)\sqrt{5(2x-5)}=0$$

これをbについて解くと

$$(b+5-x)\{b+\sqrt{5(2x-5)}\}=0$$

∴ $b=x-5$　(∵$5<x,0<b$)…③

②、③より

$c=x-\sqrt{x^2-(x-5)^2}=x-\sqrt{5(2x-5)}$…④

ここで、図のように団扇、大半円、小半円の中心をそれぞれO、A、B

とし、これらに接する等円の1つを円O_1とする。

$\triangle O_1OB$において

$O_1O=$(団扇の半径)$-$(等円O_1の半径)$=x-\dfrac{5}{2}$

$O_1B=b+$(等円O_1の半径)$=(x-5)+\dfrac{5}{2}=x-\dfrac{5}{2}$(∵③より)

よって$\triangle O_1OB$は$O_1O=O_1B$の二等辺三角形。

いま、円O_1の中心から線分ABに下した垂線の足をHとすると、

$OH=\dfrac{1}{2}OB=\dfrac{1}{2}(x-c)=\dfrac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}$(∵④より)

三平方の定理より

$O_1H^2=O_1O^2-OH^2=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2$…⑤

次に直角三角形O_1AHにおいて、$O_1A^2=AH^2+O_1H^2$より

$$O_1A^2=\left(a+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\sqrt{5(2x-5)}+\frac{5}{2}\right)^2$$

$$AH^2=(AO+OH)^2=\left(x-5+\frac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2$$

これらと⑤を用いて

$$\left(\sqrt{5(2x-5)}+\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-5+\frac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2$$

$$5(2x-5)+5\sqrt{5(2x-5)}+\frac{25}{4}=(x-5)^2+(x-5)\sqrt{5(2x-5)}+\cancel{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2}+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\cancel{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5(2x-5)}\right)^2}$$

$$-(x-10)\sqrt{5(2x-5)}=2x^2-25x+50$$

$$=(2x-5)(x-10)$$

$$\therefore\ (x-10)\{(2x-5)+\sqrt{5(2x-5)}\}=0$$

題意より、$x>5$であるから$(2x-5)+\sqrt{5(2x-5)}\neq 0$

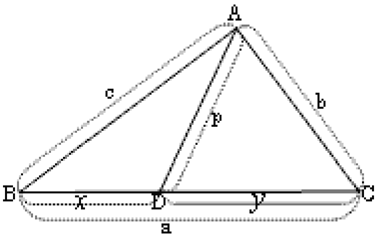
∴ $x=10$

求める団扇の直径は$2x=20$　、即ち20cm…(答)

である。

【解答例２】三平方の定理を拡張したステュアートの定理を用いて解いたものです。

ステュアート(Stuart)の定理



図において

$x+y=a$とすると

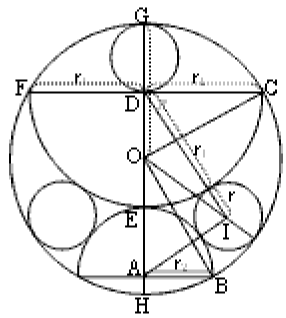
$a\left(p^2+xy\right)=b^2x+c^2y$　が成り立つ

解法２

等円の半径を　r、大半円、小半円の半径をそれぞれ　r_1、r_2とする。

また求める団扇の半径をRとすれば

図において



$OD = R-2r$、$OE = r_1-\left(R-2r\right)$

従って

$OA = OE + EA = r_1 - R + 2r + r_2$

次に　$\triangle OAB$ において　　$\angle OAB = \angle R$　　であるから

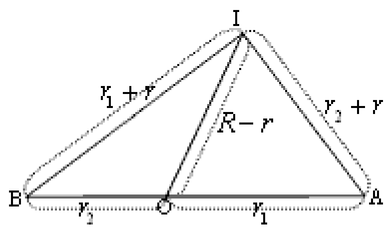
$OA^2 + AB^2 = OB^2$

$\therefore \left(r_1 - R + 2r + r_2\right)^2 + r_2^2 = R^2$

展開して　　$\left(r_1+r_2\right)^2 + 2\left(r_1+r_2\right)\left(2r-R\right) + \left(2r-R\right)^2 + r_2^2 = R^2 \cdots$ ①

ここで　　$R-2r=a$　とおく　　また$\triangle OCD$ において

$r_1^2 + \left(R-2r\right)^2 = R^2$これらを①に代入して



$\left(r_1+r_2\right)^2 - 2\left(r_1+r_2\right)a + \cancel{a^2} + r_2^2 = r_1^2 + \cancel{a^2}$

$\therefore \cancel{r_1^2} + 2r_1r_2 + r_2^2 - 2\left(r_1+r_2\right)a + r_2^2 = \cancel{r_1^2}$

$r_2^2 + r_1r_2 - a\left(r_1+r_2\right) = 0$

$r_1 + r_2 \neq 0$より

$a = \dfrac{r_2\left(r_1+r_2\right)}{r_1+r_2} = r_2$　　　従って　　$R-2r = r_2 \cdots$ ②

これより　　$\triangle OAB \equiv \triangle OCD$　　　$\therefore OA = CD = r_1 \cdots$ ③

次に　　$FD \cdot DC = GD \cdot DH$ より　　　$r_1^2 = 2r\left(2R-2r\right) = 4r\left(R-r\right) \cdots$ ④

ここで$\triangle IDA$ において　Stuart の定理を用いて

$\left(r_1+r_2\right)\left\{\left(R-r\right)^2 + r_1r_2\right\} = r_1\left(r_1+r\right)^2 + r_2\left(r_2+r\right)^2 \cdots$ ⑤

$R-2r = r_2$より $\cdots$ ⑥　　　$r_2 + r = R - r \cdots$ ⑦　　　これを⑤に代入

$\left(r_1+r_2\right)\left\{\left(r_2+r\right)^2 + r_1r_2\right\} = r_1\left(r_1+r\right)^2 + r_2\left(r_2+r\right)^2$

展開して

$r_1\left(r_2+r\right)^2 + \cancel{r_2\left(r_2+r\right)^2} + r_1r_2\left(r_1+r_2\right) = r_1\left(r_1+r\right)^2 + \cancel{r_2\left(r_2+r\right)^2}$

r_1でわって　　$\left(r_2+r\right)^2 + r_2\left(r_1+r_2\right) = \left(r_1+r\right)^2$

この式に⑥⑦を代入すると

$(R-r)^2 + r_1(R-2r) + (R-2r)^2 = (r_1 + r)^2$

展開すると

$R^2 - 2Rr + \cancel{r^2} + Rr_1 - 2rr_1 + R^2 - 4Rr + 4r^2 = r_1^2 + 2r_1 r + \cancel{r^2}$

$\therefore\ 2R^2 - 2Rr + Rr_1 - 2rr_1 - 4Rr + 4r^2 = r_1^2 + 2r_1 r$　　この式に④を代入すると

$2R^2 - 2Rr + Rr_1 - 4rr_1 - 4Rr + 4r^2 = 4Rr - 4r^2$

$\therefore\ 2R^2 - 10Rr + 8r^2 + Rr_1 - 4rr_1 = 0$

$2(R^2 - 5Rr + 4r^2) + r_1(R-4r) = 0$

$2(R-4r)(R-r) + r_1(R-4r) = 0$

$(R-4r)\{2(R-r) + r_1\} = 0$　　ここで　　$R - r > 0$より

$\{2(R-r) + r_1\} > 0$　　$\therefore\ R - 4r = 0$

すなわち　　$R = 4r$

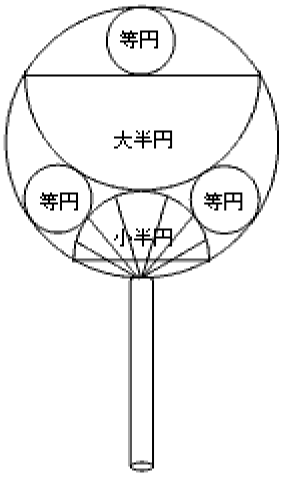
$\therefore\ 2R = 4 \times 2r$　（$2r = 5$cmなので）

　　$= 4 \times 5$

　　$= 20$cm…答

解説

実際に、清水寺に奉納された算額には、次のように書かれています。



今有如図団扇内設大小半円二個容等円三個其
等円径若干問得団扇径術如何
答曰如左術
術曰置等円径四之得団扇径合問

(現代訳)

今、団扇(うちわ)の中に大小の半円２個と、等円３個が図のように内接している。等円の直径が与えられている時、団扇の直径はどのようにして求めるか。

答え　左の術のとおり。

術(解き方)　等円径を置き、これを４倍すれば、団扇の直径が得られて、問題に合う。

この算額の問題の術文には

4×等円の直径=うちわの直径

としか書いていないので、どのようにして解いたのか分かりませんが、三平方の定理と方べきの定理を用いて、解答例1のようにして解いたのではないだろうかと考えられます。