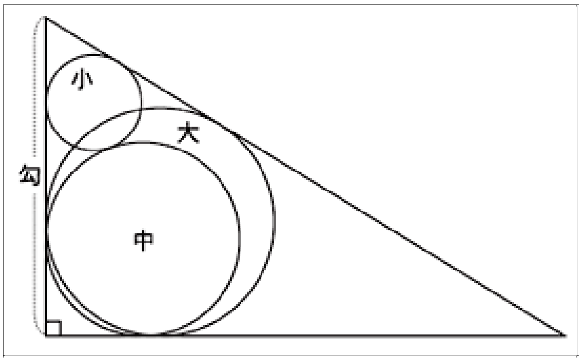
和算に挑戦 －平成18年度上級解答例－

上級問題 (高校生以上向け)	 弘化5（1848）年に玉崎神社（奥州市江刺区）に奉納された算額の問題です。 **直角三角形の中に図のように大中小の三つの円が接しています。 大円の直径が18㎝、中円の直径が16㎝、小円の直径が9㎝の時、「勾」の長さを求めなさい。** ※左の図は、見やすいように実際の長さの割合を変えて示しています。

審査員講評

上級へは305名の方々が解答を寄せられ解答総数は330通で大多数が１通の解答でしたが、複数解答の方も18名ありその内6通、4通、3通解答された方が各1名で残りは2通の解答でした。330通の解答の中で正答は280通、誤答が50通(答のみ正しいのは12通)で正答率は84.8%であります。応募数が第3回(90通)の3.7倍、第4回(72通)の4.6倍という激増ぶりに採点者一同嬉しい悲鳴を上げながらの、採点・点検となりました。

上級問題の解答では、出題者の意図(高校生以上向け)とは想定外の中学生の正解者があったことにも驚かされました。三角形の相似比とピタゴラスの定理を用いたものです。かなりの部分がこの平面図形的方法による解答でしたが、中には座標を使用したものや、その両方を用いたもの、また三角関数を使用したもの、ベクトルで計算したものなどがありました。誤答の中では、原寸大の作図をし実測したものもありましたが残念ながら証明のないものは誤答となります。

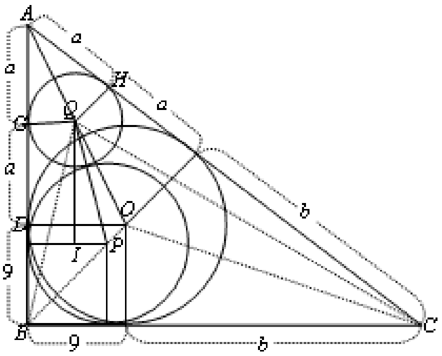
模範解答や各賞の選定には、何れも甲乙付け難く、出来るだけ簡潔で、インパクトが強いものを選定いたしましたが、既年度に受賞されている方は除かせていただきました。和算家風の解答もあり、採点には苦労いたしました。解答集では「和算編」に収録させていただきました。

皆様方の熱意・根気と出来たときの喜びを解答のそばに書かれた所感等に感じながら採点を終わらせていただきます。今年度も有り難うございました。

（古玉　晃、瀬川光政、三田信一）

解答例

【解答例１】



上図において　$AG = AH = a$、$CE = CF = b$　とおく

△ADOにおいて　$GQ : DO = 4.5 : 9 = 1 : 2$

従って　$GQ : DO = AG : AD = 1 : 2$

$\therefore AG = GD = a$　ゆえに$AB = 2a + 9$　・・・(1)

また　△QIPにおいて　$QI^2 + IP^2 = QP^2$

$\therefore QI^2 = 12.5^2 - 3.5^2 = 144$

ゆえに　$QI = 12$　従って　$GB = 12 + 8 = 20$

また　$AH = HF = a$　であるから　$AC = 2a + b$　$BC = b + 9$

次に　△ABCにおいて　$AB^2 + BC^2 = AC^2$　であるから

$(2a + 9)^2 + (b + 9)^2 = (2a + b)^2$

$\therefore \cancel{4a^2} + 36a + 81 + \cancel{b^2} + 18b + 81 = \cancel{4a^2} + 4ab + \cancel{b^2}$

$18a + 9b + 81 = 2ab$　・・・(2)

更に　△ABC =△BOC +△COA+△AOB　が成り立つから

=△AQB +△BQC + △CQA

$\therefore \frac{9(b+9)}{2} + \frac{9(2a+b)}{2} + \frac{9(2a+9)}{2} = \frac{4.5(2a+9)}{2} + \frac{20(b+9)}{2} + \frac{4.5(2a+b)}{2}$　より

$9b + 81 + 18a + 9b + 18a + 81 = 9a + 40.5 + 20b + 180 + 9a + 4.5b$

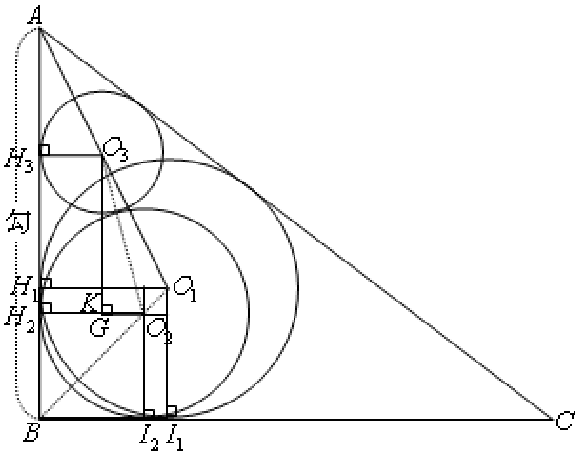
$\therefore 6.5b = 18a - 58.5$　ゆえに　$b = \frac{36a - 117}{13}$　・・・(3)

(3)を(2)に代入して　$18a + 9 \times \frac{36a - 117}{13} + 81 = 2a \times \frac{36a - 117}{13}$

整理して　$72a^2 - 792a = 0$　$a \neq 0$より

$a = \frac{792}{72} = 11$　$\therefore AB = 勾 = 2a + 9 = 31$(㎝)

【解答例２】



先ず　直角三角形を$\triangle ABC$とし、勾をABとする。

図のように大中小円の中心をそれぞれO_1、O_2、O_3　とする。

次に辺ABと大中小円との接点をそれぞれH_1、H_2、H_3とし、

辺BCと大中円との接点をそれぞれI_1、I_2とする。

また、大中小円の半径をそれぞれr_1、r_2、r_3とする。

いま、小円の中心O_3から線分O_2H_2へ下した垂線の足をGとおくとき、直角三角形O_3GO_2において

$O_2O_3^2 = O_3G^2 + GO_2^2$　が成り立つ。ここで

$O_2O_3 = r_2 + r_3$

$GO_2 = O_2H_2 - GH_2 = O_2H_2 - O_3H_3$

$= r_2 - r_3$　であるから

$(r_2 + r_3)^2 = O_3G^2 + (r_2 - r_3)^2$

よって　$O_3G^2 = (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4r_2 \times r_3 = 4 \times \dfrac{16}{2} \times \dfrac{9}{2} = 16 \times 9$

$\therefore O_3G = \sqrt{16 \times 9} = 4 \times 3 = 12$

ここで、線分O_3Gと線分O_1H_1との交点をKとすると

$O_3K = O_3G - KG = O_3G - (O_1I_1 - O_2I_2) = O_3G - (r_1 - r_2)$

$= 12 - \left(\dfrac{18}{2} - \dfrac{16}{2}\right)$　$\left(\because \quad r_1 = \dfrac{18}{2}、\quad r_2 = \dfrac{16}{2} \quad より\right)$

$\therefore \quad O_3K = 11$　・・・①

次に、小円、大円が共に辺AB、辺ACに接していることから

小円、大円のそれぞれの中心O_3、O_1　は$\angle BAC$の二等分線上に存在。

よって3点A、O_3、O_1　は一直線上にある。

また、$\angle AH_2O_2 = \angle O_3GO_2 = \angle R$(＝同位角)より、$AH_2 /\!/ O_3G$　であるから

$AH_1 /\!/ O_3K$　でもある。

よって　比例式　$O_1K : O_1H_1 = O_3K : AH_1$　が成り立つ。

ここで、　$O_1K = O_1H_1 - O_3H_3 = r_1 - r_3 = \frac{18}{2} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

$O_1H_1 = r_1 = \frac{18}{2}$

$O_3K = 11$　$(\because$ ①より$)$　であるから

$$AH_1 = \frac{O_1H_1 \times O_3K}{O_1K} = \frac{\frac{18}{2} \times 11}{\frac{9}{2}} = 22$$

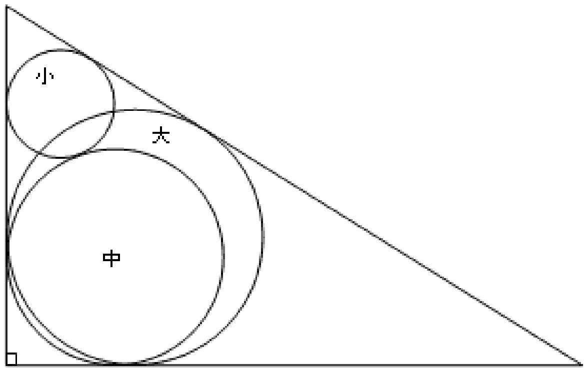
したがって

$$\begin{aligned}
勾 &= AB \\
&= AH_1 + H_1B \\
&= 22 + r_1 \quad (\because H_1B = O_1I_1 = r_1) \\
&= 22 + \frac{18}{2} \\
&= 22 + 9 \\
&= 31
\end{aligned}$$

$\therefore$ 勾 $= 31$(cm)・・・(答)

解説

実際に、清水寺に奉納された算額には、次のように書かれています。

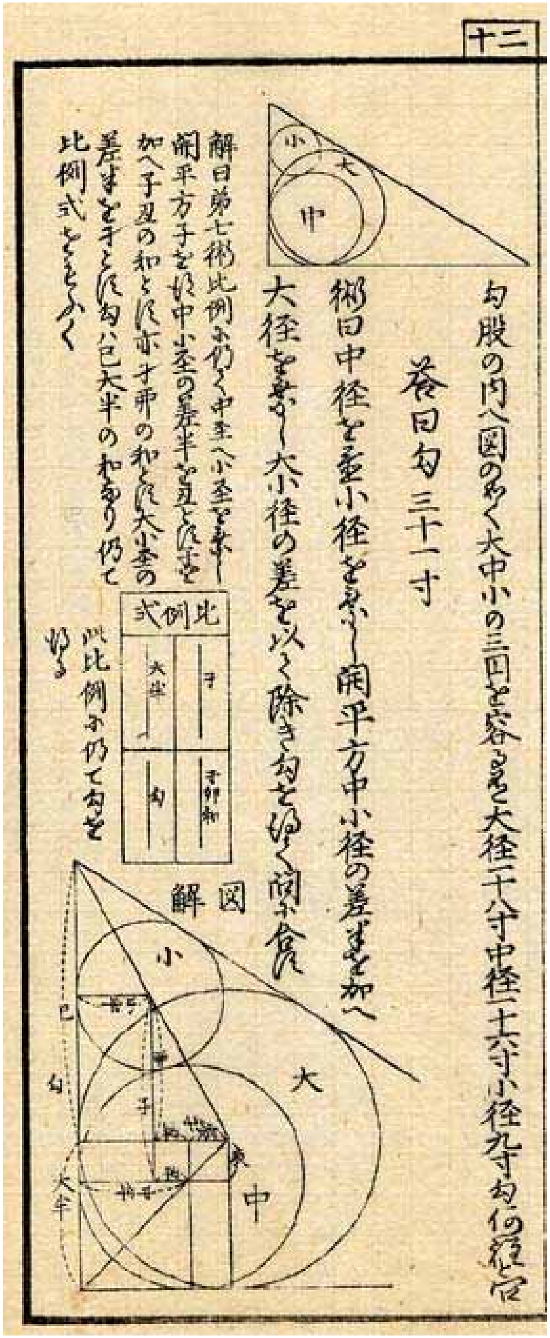


勾股ノ内エ図ノ如大中小三円容ルアリ大円一
十八寸中径一十六寸小径九寸勾何程ト問
答曰三十一寸奇有
解曰中径小径ヲ乗開平方子ヲ得中小径ノ差半
ヲ丑トス子ヲ加エ子丑和トス亦□□ノ和トス
大小径ノ差半ヲ子トス勾巳大半ノ和ナリ仍テ
比例式ヲモウク

この算額は、奥州市江刺区の玉崎駒形神社に弘化5年(1848)3月17日に奉納されたもので、村人たちが5題の問題を載せています。この問題は、その最初のものですが、文字が消えかかり判読できない部分があります。

算額の問題は、『算法新書』にありますので、『算法新書』により和算家の説き方をみてみましょう。

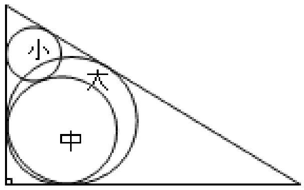
この問題は、中級問題と同じ『算法新書』巻の二の「容術」の項にあり、25問のうちの20問めにあります。



勾股の内へ図の如く大中小の三円を容れる有り。大径一十八寸、中径一十六寸、小径九寸、勾何程と問う

答曰　勾三十一寸

術曰中径を置小径を乗し開平方中小径の差半を加へ
大径を乗し大小径の差を以って除き勾を得て問いに合す



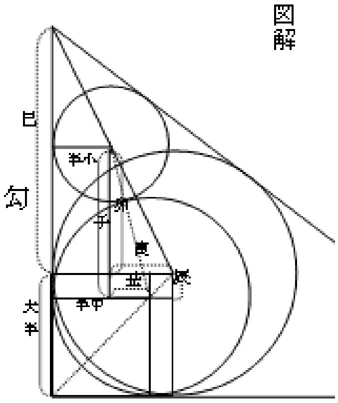
解曰第七術比例に仍中径へ小径を乗し
開平方子を得、中小径の差半を丑とす、子を
加へ子丑の和とす、亦寅卯の和とす、大小径の
差半を寅とす、勾ハ巳大半の和なり、仍て
比例式をもうく

比例式

寅	大半
寅卯和	勾

此比例に仍て勾を
得る

図解



現代訳

問題　勾(こう)股(こ)(直角三角形)の中に図のように大中小の3円を容れる。大円の直径が18寸、中円の直径が16寸、小円の直径が9寸のとき、勾(直角三角形の短辺)は、いくらか

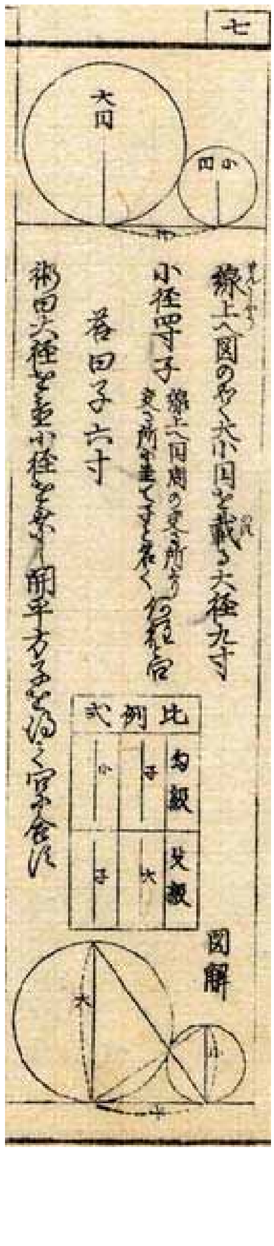
答え　31寸

術　中円の直径に小円の直径をかけ、ルートに開き、中円と小円の直径の差の半分を加え、大円の直径をかけ、大円と小円の直径の差で割る。つまり、

$$\frac{\left(\sqrt{\text{中円の直径}\times\text{小円の直径}}+\frac{\text{中円の直径}-\text{小円の直径}}{2}\right)\times\text{大円の直径}}{\text{大円の直径}-\text{小円の直径}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{16\times 9}+\frac{16-9}{2}\right)\times 18}{18-9}=\frac{\left(12+\frac{7}{2}\right)\times 18}{9}=31$$

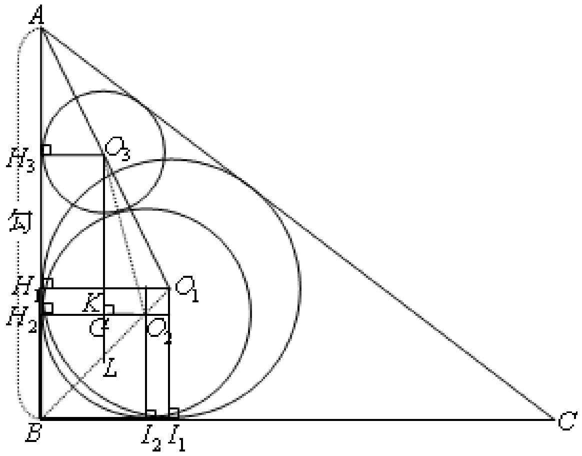
図解　解　第7術の比例によって中円の直径に小円の直径をかけ、平方に開いて「子」を得る。中円の直径と小円の直径の差の半分(中円と小円の半径の差)「丑」とする。「子」を加えて子丑の和とする。また「寅」「卯」の和とする。大円の直径と小円の直径の差の半分(大円と小円の半径の差)を「寅」とする。勾は「巳」と大円の半径の輪である。これにより比例式をつくって解く。



第7術の比例によってとありますが、左の図が第7術です。これは、直線上に互いに接する二つの円があるとき、「子」の部分の長さは、双方の直径をかけた、その平方根に一致することを示しています。

問題ではこれを小円と中円に利用し「子」の長さを求めています。

現代風の記号に置き換えながらみてみると



先ず　直角三角形を ABC とし、勾を AB とする。

図のように大中小円　の中心をそれぞれ O_1、O_2、O_3　とする。

次に辺 AB と大中小円との接点を　それぞれ H_1、H_2、H_3 とし、

辺 BC と大中円との接点をそ　れぞれ I_1、I_2 とする。

いま、小円の中心 O_3 から線分 O_2H_2 へ下した垂線の足を G、

この垂線と O_1H_1 との交点を K、BO_2 との交点を L とおく。

第7術により、子 $= O_3G = \sqrt{中円の直径 \times 小円の直径}$

$\triangle O_1AB$と$\triangle O_1O_3L$が相似だから

$O_1K : O_3L = O_1H_1 : AB$　　※算法新 書の用語を用いると・・(寅 : 子 = 大円の半径 : 勾)

$$勾 = AB = \frac{O_3L \times O_1H_1}{O_1K} \qquad ※・・\left(\frac{(寅 + 卯) \times 大円の直径 \times \frac{1}{2}}{寅}\right)$$

$$= \frac{(O_3G + GL) \times O_1H_1}{O_1H_1 - O_3H_3} \qquad ※・・\left(\frac{(子 + 丑) \times 大円の直径 \times \frac{1}{2}}{大円の直径 \times \frac{1}{2} - 小円の直径 \times \frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{(O_3G + O_1H_1 - O_2H_2) \times O_1H_1}{O_1H_1 - O_3H_3}$$

従って

$$勾 = \frac{\left(\sqrt{中円の直径 \times 小円の直径} + \frac{中円の直径 - 小円の直径}{2}\right) \times \frac{大円の直径}{2}}{\frac{大円の直径 - 小円の直径}{2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{中円の直径 \times 小円の直径} + \frac{中円の直径 - 小円の直径}{2}\right) \times 大円の直径}{大円の直径 - 小円の直径}$$

となり、術文の式に一致します。