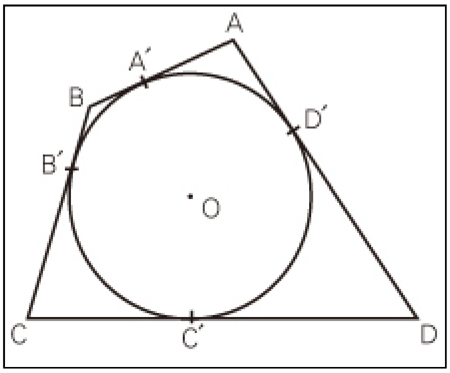
上級問題 (高校生以上向け)	 天保12年(1841)に出版された山本賀前編『算法助術』にある問題です。 円Oに、図のように四角形ＡＢＣＤが、点Ａ´、Ｂ´、Ｃ´、Ｄ´で外接しています。このとき、円の半径ｒをａ、ｂ、ｃ、ｄで表してください。 ただし、ａ＝Ａ´Ｂ、ｂ＝Ｂ´Ｃ、ｃ＝Ｃ´Ｄ、ｄ＝Ｄ´Ａです。

審査員講評

上級は中学2年生から85歳まで161名の方から187件の応募をいただきました。正解数は123件で正解率は65.8%でした。
結果のみ記載されているものや、結果が合っていても途中の導き方に間違いが見られるものは正解とはしませんでした。

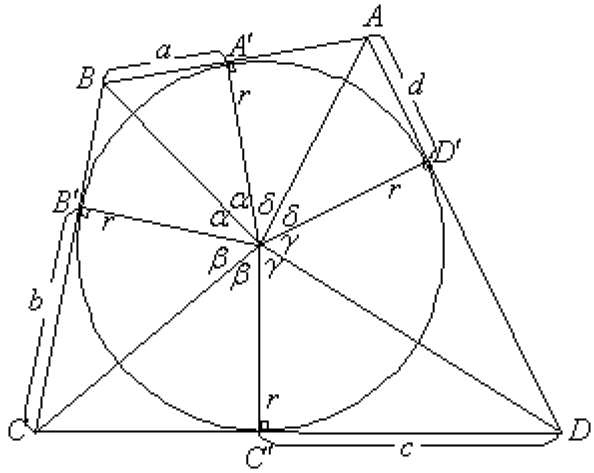
正答の大多数は、次の３通りに大別できました。

(1)　内接円Oの中心角を用いて三角関数で解く方法
(2)　四角形ＡＢＣＤの面積を２つの三角形の面積和として表し、円Oの半径rの複２次方程式を導いて解く方法
(3)　四角形ＡＢＣＤの相対する２辺を延長して交点を作り、ヘロンの公式等で四角形ＡＢＣＤの面積を導き出して解く方法

他に座標を導入して解いている方や、始点を上手に設定してベクトルで解いている方も数名おりました。また、７通りもの解法を示された方もおり、柔軟な思考力と意気込みには敬服する思いでした。
各賞の受賞者は、論理が明快でできるだけ簡潔な解答をされた方々から選定いたしました。過去に受賞され今回も受賞の対象者として十分な方々がおりましたが、その方々には今回はご遠慮いただき新人の方々に道を譲っていただきました。
挑戦者の皆様の熱意と根気に敬意を表し、採点と審査を終わらせていただきます。本年度もありがとうございました。

（三田信一、安富有恒、横田晴充）

【解答例１】



図において　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$　であるから

$$\alpha+\beta=\pi-(\gamma+\delta)$$

$$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan\{\pi-(\gamma+\delta)\}=-\tan(\gamma+\delta)$$

ゆえに　$\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma+\delta)=0$

加法定理より

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\frac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta}=0 \quad ・・・①$$

ここで　$\tan\alpha=\dfrac{a}{r}$、$\tan\beta=\dfrac{b}{r}$、$\tan\gamma=\dfrac{c}{r}$、$\tan\delta=\dfrac{d}{r}$　であるから、これらを①に代入して

$$\frac{\frac{a}{r}+\frac{b}{r}}{1-\frac{a}{r}\cdot\frac{a}{r}}+\frac{\frac{c}{r}+\frac{d}{r}}{1-\frac{c}{r}\cdot\frac{d}{r}}=0$$

変形すると　$\dfrac{a+b}{r^2-ab}+\dfrac{c+d}{r^2-cd}=0$

$$\therefore (a+b)(cd-r^2)=(c+d)(r^2-ab)$$

$$acd-ar^2+bcd-br^2=cr^2-abc+dr^2-abd$$

ゆえに　$(a+b+c+d)r^2=acd+bcd+abc+abd$

$$\therefore r^2=\frac{(a+b)cd+(c+d)ab}{a+b+c+d}$$

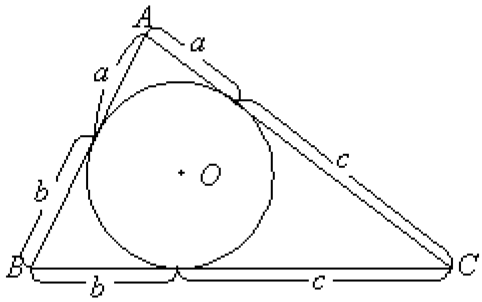
$r>0$ より　$\mathrm{r}=\sqrt{\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})cd+(c+d)ab}{a+b+c+d}}$　・・・(答え)

【解答例２】

相似比を用いたもので、和算家は、このような方法で解いたと思われます。

（予備定理）

三角形　ABC に円 O が内接している。
3頂点 A、B、C から接点までの長さを
それぞれ　a、b、c とすると
$$r^2(a+b+c)=abc$$ が成り立つ。
ただし円の半径を r する。



（証明）

右図のように傍接円 O' を作ると
$\angle OBO'=\angle R$　であるから
直角三角形　$BO'E \backsim$ 直角三角形　OBD
ここで図において
$CF=CE$　であるから

$$y+a+c=x+b+c$$

$$\therefore \quad y+a=x+b \quad \ldots ①$$

また、　$GH=y-a=b-x \quad \ldots ②$

①＋②を作ると

$$\begin{array}{rl} & y+a=x+b \\ +\;) & y-a=b-x \\ \hline & 2y=2b \end{array}$$

$\therefore\ y=b \qquad \therefore\ \underline{\underline{x=a}}$

（すなわち、　$EB=AG$）

ゆえに　$\dfrac{R}{a}=\dfrac{b}{r} \qquad \therefore\ R=\dfrac{ba}{r} \ldots ③$

また△ $CDO \backsim$ △ CEO' より

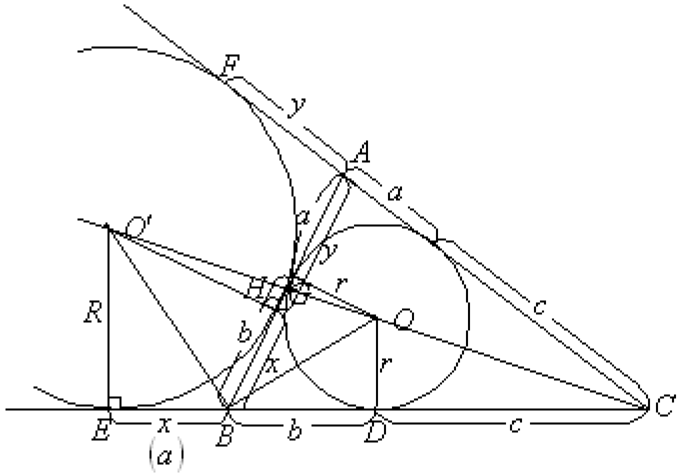
$$\frac{c}{r}=\frac{a+b+c}{R}$$

$$\therefore\ a+b+c=\frac{Rc}{r} \ldots ④$$

③を④に代入して

$$(a+b+c)r=\frac{ab}{r}\cdot c$$

すなわち　$r^2(a+b+c)=abc$

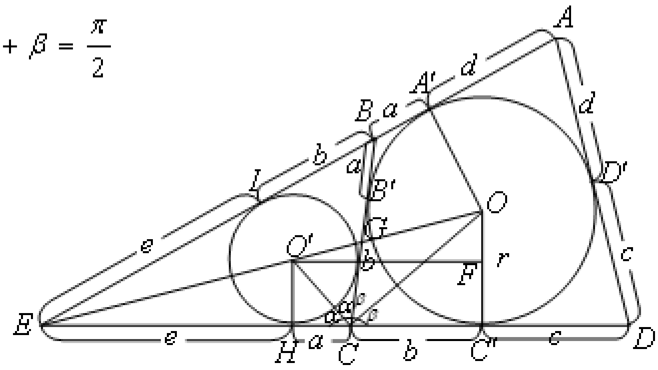


(a)

AB、CDを延長して交わった点をEとする。

$\triangle BCE$の内接円O'とする。　半径をr'、$EI = EH = e$とおく

図において$2\alpha + 2\beta = \pi$　　$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$



(GはBCと円O'との接点)

次に$EA' = EC'$であるから

$e + IB + a = e + HC + b$

$IB + a = HC + b$

また　$BI = BG$　　より

$$BI = BG = a + b - \underset{\underset{CH}{\parallel}}{CG}$$

$\therefore IB + \cancel{a} = \cancel{a} + b - IB + b$

従って　$IB = b$　　$CH = a + b - BI = a$

$\triangle EHO' \backsim \triangle O'FO$　より　$r' : e = r - r' : a + b$

$$\therefore e = \frac{r'(a+b)}{r - r'} \quad \cdots ①$$

また$\triangle OCC' \backsim \triangle CHO'$より　$a : r' = r : b$　$\therefore r' = \dfrac{ab}{r}$　$\cdots ②$

②を①に代入して
$$e = \frac{\frac{ab}{r}(a+b)}{r - \frac{ab}{r}} = \frac{ab(a+b)}{r^2 - ab} \quad \cdots ③$$

次に予備定理を用いて

$$r^2(d + c + e + b + a) = cd(a + b + e) \quad \cdots ④$$

ここで
$$e + b + a = \frac{ab(a+b)}{r^2 - ab} + b + a = \frac{a^2b + ab^2 + br^2 - ab^2 + ar^2 - a^2b}{r^2 - ab}$$
$$= \frac{r^2(a+b)}{r^2 - ab}$$
これを④へ代入して

$$r^2\left(d + c + \frac{r^2(a+b)}{r^2 - ab}\right) = cd \cdot \frac{r^2(a+b)}{r^2 - ab}$$
分母を払って

$$r^2\{(d+c)(r^2 - ab) + r^2(a+b)\} = r^2cd(a+b)$$

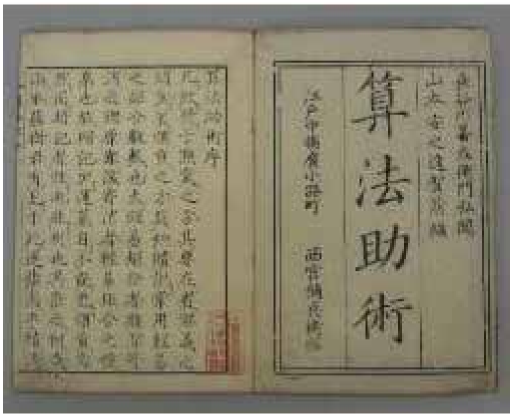
$$dr^2 - abd + cr^2 - abc + ar^2 + br^2 = acd + bcd$$

$$\therefore (a+b+c+d)r^2 = abd + abc + acd + bcd$$
$$= (a+b)cd + (c+d)ab$$

すなわち
$$r^2 = \frac{(a+b)cd + (c+d)ab}{a+b+c+d}$$

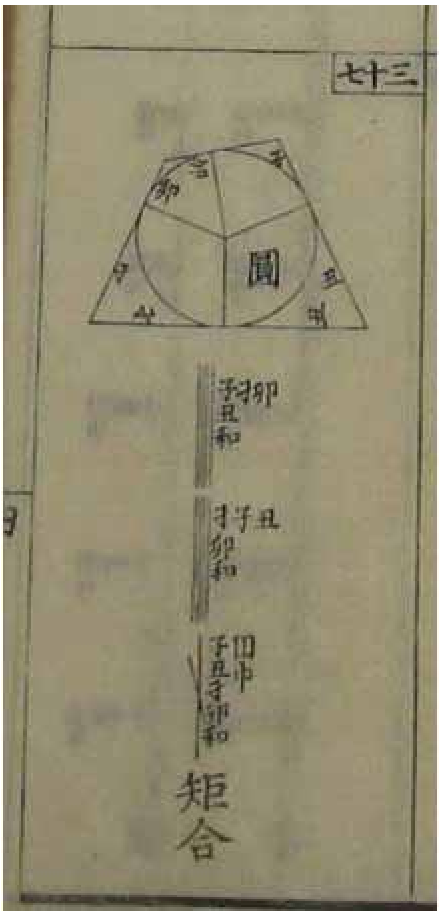
$r > 0$より
$$r = \sqrt{\frac{(a+b)cd + (c+d)ab}{a+b+c+d}} \quad \cdots (答え)$$

解説



上級問題は『算法助術』の３７番に掲載されています。『算法助術』は天保12年(1841)に、長谷川弘(ひろむ)閲、山本賀前編で、千葉胤秀の『算法新書』と同様に、江戸の長谷川数学道場から出版されたものです。長谷川弘は、初め佐藤秋三郎といい南方村(現在の宮城県登米市南方町)の農家に生まれ、千葉胤秀の紹介で長谷川道場に入門、長谷川寛(ひろし)の養子となった人です。

『算法助術』は基本的な幾何学の公式105種をまとめたもので、「助術」の名の通り、種々の問題の解決の助けとなるとても便利な本です。



和算の式「点竄術（てんさんじゅつ）」

関孝和が考案した方程式の表現方法で「傍書法」ともいいます。

この部分は、

4×(子+丑)×ヨ×卯+ 4×(ヨ+卯)×子×丑=(子+丑+ヨ+卯)×円径^2

という意味です。(ヨは寅と同じ)

解答例の答えの前に

$$(a+b+c+d)r^2 = acd + bcd + abc + abd$$

という式が出ています。この本の式の、子、丑、ヨ、卯を

a、b、c、d に、それから本では円径(円の直径)で求めているので、

$2r$ を用いて直すと

$$4(a+b)cd+4(c+d)ab=(a+b+c+d)4r^2$$

$$abc+bcd+abc+abd=(a+b+c+d)r^2$$

となるので、現代解と同じ式になります。