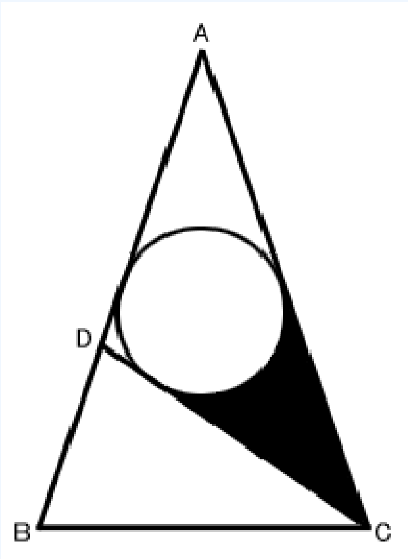
和算に挑戦 －平成 20 年度上級解答例－

<table>
<tr>
<td>上級問題
（高校生以上向け）</td>
<td>

文久元年(1861)に熊野白山滝神社(一関市)に奉納された算額の問題です。

二等辺三角形 ABC の辺 AB 上に点 D をとり、D と C を結んだところ AD=DC=BC=1 でした。
いま、△ADC の内接円をかいたとき、図の黒い部分の面積を求めて下さい。</td>
</tr>
</table>

審査員講評

上級問題の正答率は、昨年の65．8%から11．5%あがり、77．3%でした。今年の問題は計算が少し長くなるものの、考え方は割合に単純なので正答率が高くなったのではないでしょうか。図形の特徴をうまくつかんで、それを利用できた人がシンプルな解を示してくれました。特徴をしっかりつかむことで、相似、三平方の定理が利用でき、中学生でも解けることがわかりました。また高校の基礎知識で解答される方が多く、いろいろな世代の方がパズルを解くように楽しんでおられたのが印象的でした。

三角関数を利用して解いた中学生で tan18° の値を半角の公式を用いて見事に導き出し、正解を得ていたのには感心しました。

解答をみてみると、

①三角関数を利用したものは、tan18° 、cos36° 等の値は三角関数表を利用した人がほとんどでした。

②三平方の定理を用いて面積を上手に計算したもの。

③二等辺三角形に外接円を作り正五角形から面積を計算したもの。

以上の3種類に大きく分類されました。

正解としてまとめるまでに長い道のりをたどった人も多く、途中の数式変形で計算を誤り正しい答えに至らなかった答案が、やや多かったと思いました。

解答の途中で2重根号がでてくるため、最後まできれいな答案を目指し、簡素化する努力がみられる答案が多かったのですが、複雑な形のままで、やめてしまった人もおられました。多分正答として、どこまでで止めればよいか迷ったのでしょう。

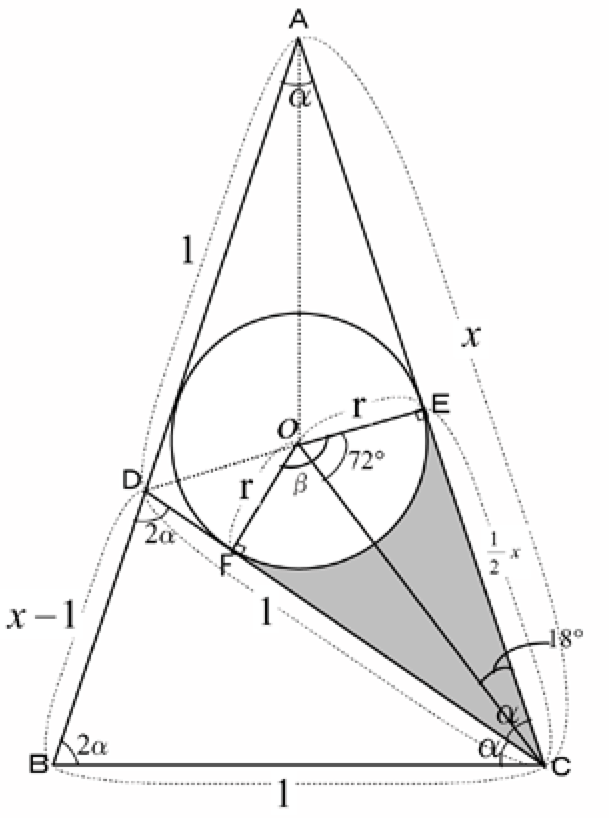
答えの形は、三角関数の値を出さずにそのままで答えとしたもの、2重根号のある式で止め答えとしたもの、最後まで近似計算をして小数の近似値を答えとしたものの、3通りありました。どの形の答えでも正しければ正答としましたが、分母の根号は、できるだけ有理化して欲しいものです。

初級、中級、上級問題を全部解いて応募した方の感想に「今年の問題は、上級問題より中級問題の方が難しかった」とありましたが、中級問題は直角三角形さえ見つけ出すことができれば、三平方の定理だけで解けるので、問題作成のときは特に異議なく出題された経緯があります。上級問題は、方針は簡単ですが、計算がやや面倒なので、これを上級にいたしました。しかし最初に書きましたように正答率が 77.3%ですから、少し易しかったのかもしれません。来年度は、更に吟味して出題いたすつもりでおります。

最後に挑戦者の皆様に心から敬意を表し、筆を置きます。

解答例

【解答例1】三角関数を用いた解



図において　$AC = x$、$\angle A = \alpha$とおくと　$\angle ACD = \alpha$

$\angle CDB = \angle CBD = 2\alpha$　より

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$、$5\alpha = 180°$より　$\alpha = 36°$

$x : 1 = 1 : x - 1$

$\therefore \quad x^2 - x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$より　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.618033$

$\alpha = 36°$より　$\angle EOF = \beta = 144°(\because \alpha + \beta = 180°)$

$\angle EOC = 72°$

従って　黒積　$= 2\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} x\, \mathrm{r} - \pi r^2 \times \dfrac{72°}{360°}\right) = 2\left(\dfrac{1}{4}xr - \dfrac{1}{5}\pi r^2\right)$

ここで　$r = CE \tan 18° = \dfrac{1}{2} x \tan 18°$

これより　黒積　$= \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{1}{2}x \tan 18° - \dfrac{2}{5}\pi \cdot \dfrac{1}{4}x^2 \tan^2 18°$

$= \dfrac{1}{4}x^2 \tan 18° - \dfrac{1}{4}x^2 \tan^2 18° \times \dfrac{2}{5}\pi$　　$\tan 18° = 0.3249$（三角関数表による　）

$= \dfrac{1}{4}x^2 \tan 18° \left(1 - \dfrac{2}{5}\pi \tan 18°\right)$

$= \dfrac{3+\sqrt{5}}{8} \times 0.3249\ (1 - 0.40828129\ \ 632)$

$= 0.1258288703\ \ 4$

（答）　0.1258

ここで　三角関数表を　用いずに $\tan\alpha = \tan 18°$の値を求めてみる　　$\alpha = 18°$とおくと

$5\alpha = 90°$より　$2\alpha = 90° - 3\alpha$　$\therefore \tan 2\alpha = \tan(90° - 3\alpha) = \dfrac{1}{\tan 3\alpha}$

２倍角、3倍角の公式より　$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{1-3\tan^2\alpha}{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}$

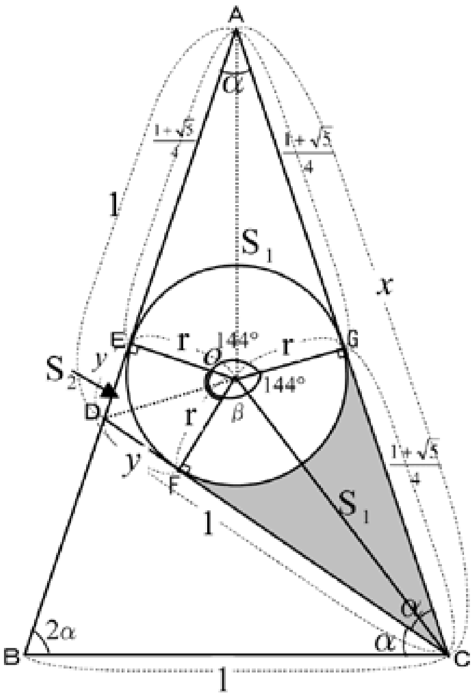
$\therefore 6\tan^2\alpha - 2\tan^4\alpha = 1 - 3\tan^2\alpha - \tan^2\alpha + 3\tan^4\alpha$

従って　$5\tan^4\alpha - 10\tan^2\alpha + 1 = 0$

$\therefore \tan^2\alpha = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-5}}{5} = \dfrac{5 \pm \sqrt{20}}{5}$　　$\alpha = 18°$なので $\tan\alpha < 1$

$\therefore \tan^2\alpha = \dfrac{5-\sqrt{20}}{5}$　　ゆえに　$\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}} = 0.3249196\cdots$

【解答例2】三角関数を用いない解



図において　$AC = x$、$\angle A = \alpha$ とおくと　$\angle ACD = \alpha$

$\angle CDB = \angle CBD = 2\alpha$　より

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ 、$5\alpha = 180°$より　$\alpha = 36°$

$x : 1 = 1 : x - 1$

$\therefore \quad x^2 - x - 1 = 0 \qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$より　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = 36°$より　$\angle GOF = \beta = 144°(\because \alpha + \beta = 180°)$

黒積をS_1とおくと、 AEGもS_1である

DEFをS_2とする　$DE = DF = y$　とおくと

四辺形$OEDF = ry = \dfrac{3-\sqrt{5}}{4}r$

$$\left(\because \quad y = AD - AE = 1 - \frac{x}{2} = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$$

$\angle EOF = 360° - 2 \times 144° = 72°$であるから

$$S_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}r - \pi r^2 \times \frac{72°}{360°} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}r - \frac{\pi r^2}{5}$$

次に$Heron$の公式を用いて△ ADCの面積を求める

$AD = DC = 1, \quad AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$2S = 1 + 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore S = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$$

$$S - 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \qquad S - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

従って　

$$\triangle ADC = \sqrt{S(S-1)(S-1)\left(S - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{4}}$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{15 - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}$$

$$= \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

また　$\triangle ADC = \triangle OCA + \triangle OAD + \triangle ODC$

$$= \frac{1}{2}r\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = \frac{1+\sqrt{5}}{4}r + r = \frac{5+\sqrt{5}}{4}r$$

$$\therefore \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}r$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}r \qquad \therefore r = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{16}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

これより $\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2S_1+S_2+\pi r^2$

$$=2S_1+\frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}-\frac{1}{5}\pi r^2+\pi r^2$$

$$=2S_1+\frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}+\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$=2S_1+\frac{3-\sqrt{5}}{16\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\frac{10-2\sqrt{5}}{100}\pi$$

$$\therefore 2S_1=\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{1}{16\sqrt{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\frac{10-2\sqrt{5}}{100}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{80}\left(5+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}+5\right)-\frac{10-2\sqrt{5}}{100}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{80}\left(10+2\sqrt{5}\right)-\frac{5-\sqrt{5}}{50}\pi$$

$$=\frac{1}{40}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(5+\sqrt{5}\right)-\frac{5-\sqrt{5}}{50}\pi$$

$$\therefore S_1=\frac{1}{80}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(5+\sqrt{5}\right)-\frac{5-\sqrt{5}}{100}\pi$$

$$=\frac{2.351141\times 7.2360679}{80}-0.0276393\times 3.14159$$

$$=0.21266269-0.0868313$$

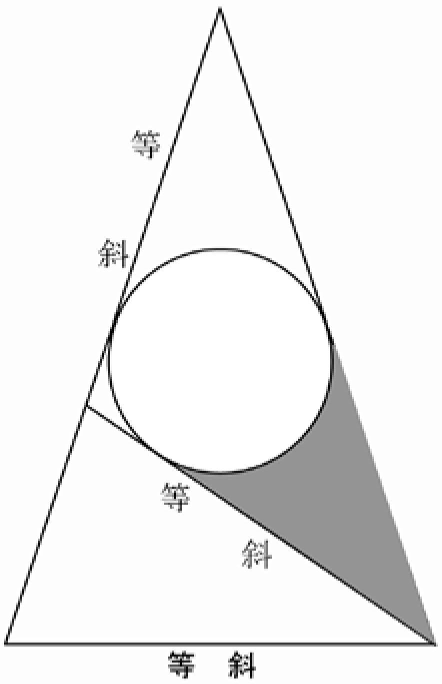
$$=0.125831$$

(答)　0.1258

解説

上級問題は一関市滝沢にある熊野白山滝神社に文久(ぶんきゅう)元年(1861)3 月 24 日に菅原市左衛門、菅原勘五郎、千葉倉松の門人 22 名によって奉納された算額です。師匠の 3 人は千葉胤秀の門弟で、神社の近くの村の人で近隣の人々に和算を広めました。このため、熊野白山滝神社には 5 面もの算額が残っています。

この算額は縦 65 ㎝、横 375 ㎝と大型で、岩手県でも最も長い算額です。上級問題は、その 13 番目にあり、阿部金太夫貞治が提出したものです。実際の算額には、次のように書かれています。



今有如図圭内設等斜三処及円画黒積其等斜一
寸問黒積幾何
答曰黒積一分二厘五毛八余
術曰置一百二十五個開平方加二十五個名定以
八百個除之開平方乗定内減円周率余以定除之
乗等斜巾得黒積合問

阿部金太夫貞治

現代訳

問題

今、図のように二等辺三角形内に、内接円と３つの等辺(等斜)を作り、黒積を画く。その等辺の長さが１寸のとき、黒い部分(黒積)の面積を求めよ。

答え

黒い部分の面積は 0．1258・・・

（１分２厘５毛８余）

術

125 を平方に開き、25 を加える。これを「定」とする。定を 800 を割り、平方に開き定をかける。ここから円周率を引き、定で割る。これに等斜の２乗をかければ問いに合う。

術を現代の式で表すと

$\sqrt{125}+25=$ 定　とおくと

$$黒積=\frac{\sqrt{\frac{定}{800}}\times 定-円周率}{定}\times 等斜^2$$ である

このとおりに計算すると以下のとおり

$$定=\sqrt{125}+25=36.1803398874$$

$$黒積=\frac{\sqrt{\frac{36.1803398874}{800}}\times 36.1803398874-3.14159}{36.1803398874}\times 1^2$$

$$=0.12583129\cdots\cdots$$