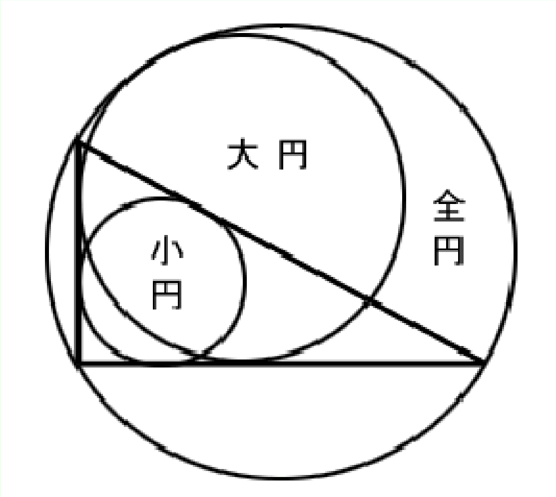
和算に挑戦 －平成 20 年度中級解答例－

中級問題 （中学生以上向け）	 	天保 12 年(1841)に根城八幡宮(大船渡市)に奉納された算額の問題です。 図のように 全円内に直角三角形が内接し、小円は直角三角形に内接、大円は直角三角形の 2 辺と全円に接しています。 小円の直径が 1 ㎝のとき、大円の直径を求めて下さい。

審査員講評

中級は複数以上の解答提出者を含め、386 件の応募がありました。応募数は、初級と上級が前回および前々回とあまり差がないのに反して非常に減少しました。その原因は円が３個のため図が書きにくく、解答の糸口がみつかりにくかったことと思われます。

出題の意図は、「丁寧に図を書き、全円と大円の中心を結ぶ線分を斜辺とする直角三角形を作り、三平方の定理を適用して大円の直径を求める方法」でした。この方法は三平方の定理を使用すればよいので中学生にも十分に解答可能と考えました。

ほとんどすべての答案が、大円の直径は２㎝と正しい値を書いていました。しかし、採点にあたっては、大半を論理性などから半解答と採点しました。解の内容が、十分条件に終始したためです。そのため、正解数が非常に低率になりました。

中学生はまだ学習していませんが、数学の条件についてすこし説明します。

数学の問題の解答は必要条件を求めることと言ってよいと思います。問題によってはまれに十分条件も必要な場合もあります。

ｐ、ｑが命題のとき、ｐ→ｑという命題を考えます。命題ｐとｑの表す真理集合をＰとＱとし、この命題が正しいとき、P⊆Qが成り立ちます。このときｑはｐの必要条件、ｐはｑの十分条件といいます。

数学の解は必要条件で良いことを簡単な例で説明します。

２次方程式　$x^2-3x+2=0$を解きなさい。この問題では

因数分解して　$(x-2)(x-1)=0$　　∴　$x=1,\ 2$・・・・・必要条件です。

この値は正しいので正解です。しかし、厳密には逆も成立すること（十分条件）も求められます。つまり

$x=1$のとき、左辺$=1^2-3\times1+2=1-3+2=0$　逆を満たす。

$x=2$のとき、左辺$=2^2-3\times2+2=4-6+2=0$も満たす。・・・・十分条件が成立。

∴　$x=1,\ 2$　は与方程式なら解である。このように結論されます。

２次方程式　$x^2-3x+2=0$とその解である$x=1,\ 2$は

「　$x^2-3x+2=0 \quad \longleftrightarrow \quad x=1,\ 2$　」　と簡単に表現し

「必要十分条件」または「同値」と言います。しかし、必要条件が正しければ十分条件を満たすことは、殆どの問題で明らかなので、必要条件を求めれば良いことになります。

今回、多くの応募者が、大円の中心から直角三角形の底辺と高さに垂線をおろしてできる四角形が正方形であることを証明し、この正方形に小円が内接することから大円の直径を２㎝としていました。あるいは、大円の直径を２㎝が題意を満たすことを様々工夫して表現していました。たしかに、必要条件として、大円の直径を２㎝と求めて図を書くと、小円はこの正方形に内接します。しかし、この方法は、全円、大円、小円の３円を考慮したうえでの必要条件ではありません。それで、正解とはしませんでした。解を考える際、一般的な図で考えてほしかったと思います。しかし、非常に努力した答案が多く、別の意味で採点者も心うたれました。

正しい答案は３種類に大別されます。

① 全円と大円の中心を結ぶ線分を斜辺とする直角三角形を作り、三平方の定理を使用する方法。

② 直角三角形の直角となる頂点を原点にとり、斜辺を直線の方程式で表現し、点と直線の距離を使用する方法。

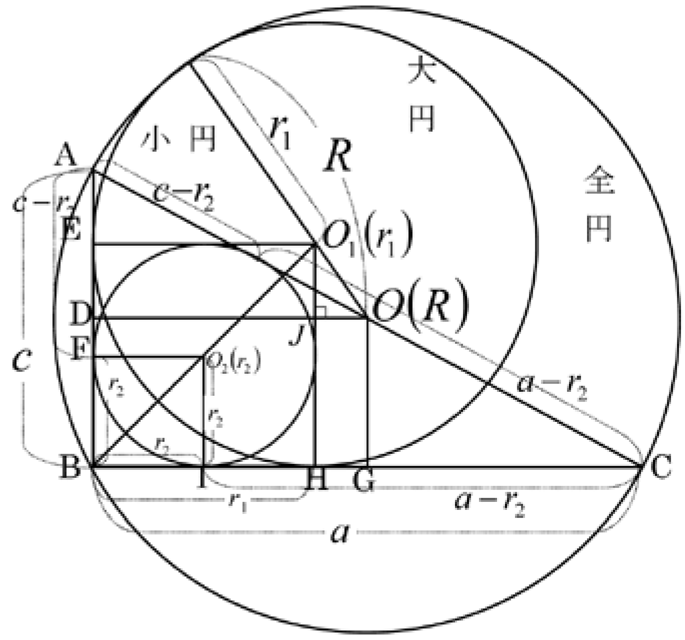
③　直角以外の角を変数として、三角比に持ち込む方法。

直角三角形と大円および全円の中心の位置関係を場合分けした丁寧な答案を寄せられた方もおりました。解答に取りかかる前の３個の円の位置関係の確認に様々ご苦労なされてこのような場合わけの素晴らしい答案に到達したと思います。

小学生から 80 歳代の高齢の方まですばらしい答案がありました。採点しながら、その着想やご労苦に心が躍りました。あつい時間を与えていただきありがとうございます。次回もまた、素晴らしい答案お寄せください。お待ちしています。

以上、感想を講評とさせていただきます。

解答例



全円、大円、小円の半径をそれぞれR、r_1、r_2とおく、

図において　$\overline{OO_1}=R-r_1$

$\overline{O_1J}=r_1-DB=r_1-\dfrac{c}{2}$　(DはABの中点)

ただし　$\overline{BC}=a$、$\overline{AB}=c$　　とする

$\overline{OJ}=\overline{GH}=\overline{GB}-\overline{BH}=\dfrac{a}{2}-r_1$　(GはBCの中点)

これより　直角三角形OO_1Jで三平方の定理を用いる

$$(R-r_1)^2=\left(r_1-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-r_1\right)^2$$

展開して

$$R^2-2Rr_1+r_1^2=r_1^2-r_1c+\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{4}-ar_1+r_1^2$$

ここで　$\triangle ABC$において

$$a^2+c^2=4R^2$$

$\therefore \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{c^2}{4}=R^2$　　これを上式に代入

$$\therefore r_1^2+2Rr_1-(a+c)r_1=0$$

$$r_1=a+c-2R\cdots①$$

ここで$2R=a-r_2+c-r_2=a+c-2r_2$　　この式を①に代入して

$$r_1=a+c-a-c+2r_2=2r_2$$

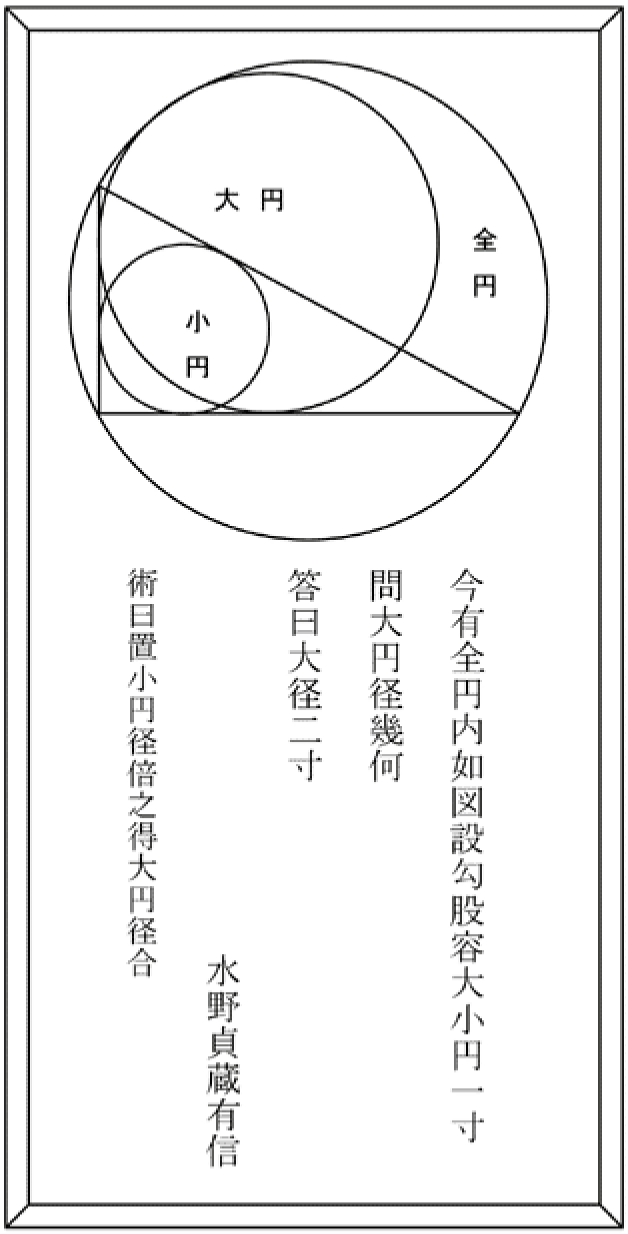
$$\therefore r_1=2r_2=1$$

ゆえに$2r_1=2$

（答）　大円の直径は2㎝

解説

中級問題は、大船渡(おおふなと)市の根城八幡宮に、天保(てんぽう)12 年(1841)8 月に千葉胤道(たねみち)の門人 21 名が奉納した算額の問題です。根城八幡宮には 2 枚の算額があり、いずれも縦 60 ㎝、横 182 ㎝ほどのものです。一方の算額は、上 3 分の 1 が欠損し奉納年月日がありませんが、2面の算額は対と考えられます。　中級の問題は 11 問掲載されている算額のうち 5 番目にあり、水野貞蔵有信の提出したものです。算額奉納者の師匠は千葉胤道ですが、この人は一関の和算家千葉胤秀(たねひで)の息子で、胤秀の跡を継いだ関流 8 伝の和算家です。千葉胤道は、一関から太平洋沿岸部まで出張して和算を教えたのです。算額には次のように描かれています。



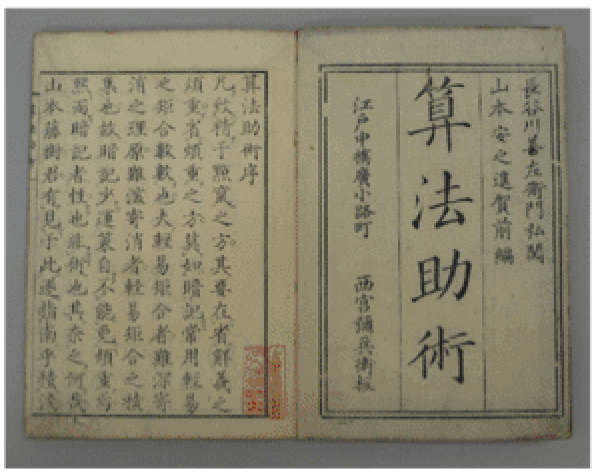
現代訳

問題　今、図のように全円の中に直角三角形と大小の円がある。その小円の直径が 1 寸の時、大円の直径はいくらか。

答え　大円の直径は 2 寸

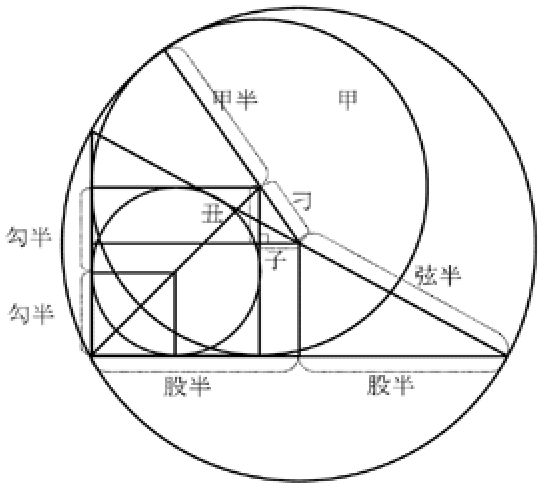
術　小円の直径を倍にすれば大円の直径となる。

算額の術文は簡単にしか書いていないので、和算家がどのような解き方をしたのかはわかりません。この問題は天保 12 年(1841)に発行された『算法助術』の３１番にも掲載されています。『算法助術』は、長谷川弘(ひろむ)閲、山本賀前編で、千葉胤秀の『算法新書』と同様に、江戸の長谷川数学道場から出版されたものです。長谷川弘は、初め佐藤秋三郎といい南方村(現在の宮城県登米市南方町)の農家に生まれ、千葉胤秀の紹介で長谷川道場に入門、長谷川寛(ひろし)の養子となった人です。

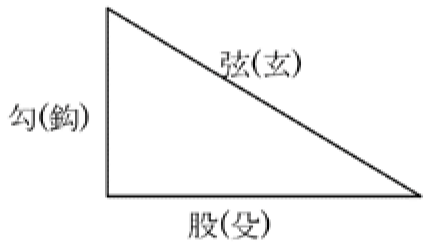


『算法助術』は基本的な幾何学の公式 105 種をまとめたもので、「助術」の名の通り、種々の問題の解決の助けとなるとても便利な本です。しかし、この本にも右のように「乙円の直径を２倍すれば甲円の直径となる」と簡単にしか書いていません。

東北大学附属図書館に江戸時代から明治にかけて活躍した数学者河北朝鄰(ともちか)(1840-1919)が「算法助術」の解答を書いた「算法助術解義」があります。現代的に直すと次の様になります。言葉は違いますが、現代でも通用する解き方です。



用語について



和算では、直角三角形のことを「こうこ」といい、「勾股」「鉤股」などと書きます。直角三角形の直角を挟む短い辺を「勾(鈎・鉤)」(こう)、長い辺を「股(殳)」(こ)、斜辺を「弦(玄)」(げん)といいました。

「刁」は、十二支の寅の意味です。

股半－甲半=子より　　股－甲=2×子・・・・①

甲半－勾半=丑より　　甲－勾=2×丑・・・・②

弦半－甲半=刁より　　弦－甲=2×刁・・・・③

次に子^2＋丑^2=刁^{2}より　(2 子)^2+(2 丑)^2=(2 刁)^2

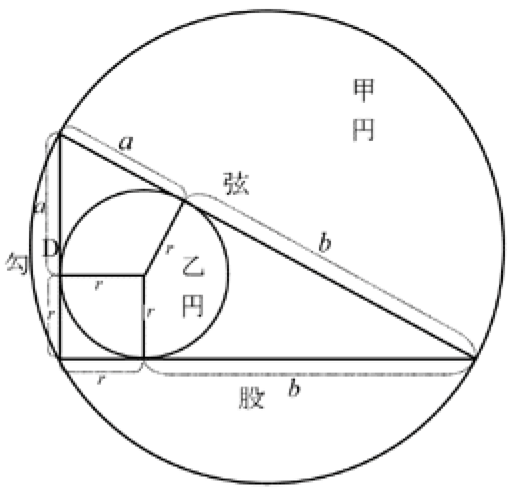
これに①②③を代入すると　　(股－甲)^2+(甲－勾)^2=(弦－甲)^2

股^2－2 甲股＋~~甲~~^{2}＋甲^2－2 甲勾＋勾^2=弦^2－2 甲弦＋~~甲~~^{2}

ここで　勾^2＋股^2=弦^{2}であるから

甲^2－2 甲股－2 甲勾＋2 甲弦=0

従って甲－2 股－2 勾＋2 弦= 0・・・・④



左図において

股=b＋r

勾=a＋r

弦=a＋b

乙円の半径=r

-2股-2勾$+2$弦$=-2(b+r)-2(a+r)+2(a+b)$

$\quad=\cancel{-2b}-2r\cancel{-2a}-2r\cancel{+2a}\cancel{+2b}$

$\quad=-4r=-2\times \underset{\text{乙}}{\underset{\shortparallel}{2r}}=-2$ 乙

ゆえに④は甲－2 乙=0

∴2 乙=甲