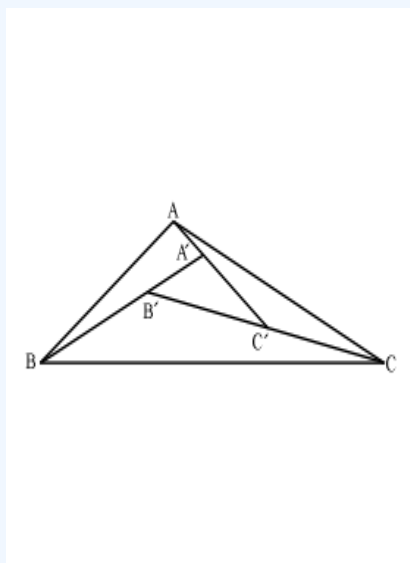


上級問題
(高校生以上向け)



一関の和算家千葉胤秀が編集した『算法新書』(文政 13 年(1830)刊行)にある問題です。

三角形ABCにおいて、頂点A、B、Cから、3つの線分を引き、図のような相似三角形A'B'C'を作ります。

(但し $\angle CAB = \angle C'A'B'$ 、 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ です。)

AB=3cm、BC=6cm、AC=4cm、 $AA' + BB' + CC' = 5$ cmであるとき、CC'の長さを求めなさい。

審査員講評

今回の上級問題の正答率は、74.7%でありました。これは過去の正解率と比較して3番目に高い正答率でした。また、応募者数は136人で、この4年間(第5回～第8回)の中では最も少ない応募者数でした。今回の上級問題は、一見取り付きやすい感じの問題ですが糸口をつかみ損なうと迷路に入りこんでしまう問題だったのでしょうか。応募者数が少なかったのにもかかわらず正解率が高率であったのは自分の答案に確信を持った方々が応募された結果と思われます。

正解の大多数は、次の3通りに大別できました。

① 三角比(正弦定理、余弦定理)を利用して解いたもの

② 図形の特徴を上手にとらえて解いたもの

- ・相似を利用
- ・面積を利用
- ・外接円を利用
- ・回転を利用

③ 幾何の定理(メネラウスの定理など)を利用して解いたもの

解答の割合が比較的多かったのは①の方法を用いたものでした。

どの解答も、じっくり取り組んだ姿勢が伺われました。流石に数学が好きな方々の解は素晴らしく採点していて感心させられることしばしばでありました。

ひとりで何種類かの解を準備し、それが全て素晴らしい内容であった方もありました。特に6通りの解答を寄せられた方がおり、その解法はどれも論理がしっかりしており見事なものでありました。

なお、正解としなかった例をあげますと次のようになります。

- ・結果のみ記載しているもの
- ・作図等を行い、長さや角度を近似値を使って推測して結果を求めているもの
- ・結果が合っているも途中の論理が飛躍して不明なもの
- ・論理を正確に進めながら結果が一般解だけで終わっているもの

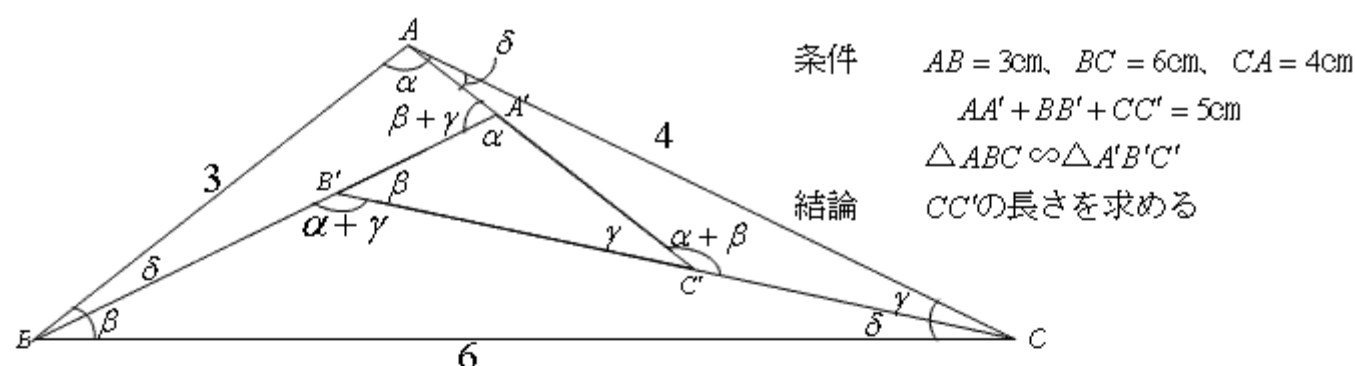
ところで、応募された50歳代の方から次のような感想が寄せられました。

「今回の問題は、図形としては単純なのに直ぐには解答が思いつかず、元旦の暇つぶしに大卒の子供と競争してしまった。こんな問題に取り組むのは40年ぶりですが、昔の杵柄はまださび付いてはいなかったようです。このような出題の企画に感謝申し上げ、今年も1年間仕事に頑張ります。」

出題に携わっている我々にとっては大変励みになる言葉でありました。来年度も皆様から感謝と評価を得られるよう一層の努力をして参りたいと思っております。

最後に挑戦者の皆様の熱意に敬意を表し、採点と審査の報告とさせていただきます。

解答例



正弦定理を利用した解

$\angle BAC = \alpha$ $\angle ABC = \beta$ $\angle BCA = \gamma$ $\angle CAC' = \delta$ とすれば

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\angle ABA' = \pi - (\alpha - \delta + \beta + \gamma) = \pi - (\pi - \delta) = \delta$$

$$\angle BCB' = \pi - (\beta - \delta + \alpha + \gamma) = \pi - (\pi - \delta) = \delta$$

$$\triangle AC'C \text{ において } \frac{4}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{CC'}{\sin \delta} \dots \textcircled{1} \quad \triangle ABA' \text{ において } \frac{3}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{AA'}{\sin \delta} \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle BCB' \text{ において } \frac{6}{\sin(\gamma + \alpha)} = \frac{BB'}{\sin \delta} \dots \textcircled{3}$$

$$\text{ここで } \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma) = \sin \gamma \quad \sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\gamma + \alpha) = \sin(\pi - \beta) = \sin \beta \quad \text{これを}\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\text{へ代入すると}$$

$$\frac{4}{\sin \gamma} = \frac{CC'}{\sin \delta} \dots \textcircled{1}' \quad \frac{3}{\sin \alpha} = \frac{AA'}{\sin \delta} \dots \textcircled{2}' \quad \frac{6}{\sin \beta} = \frac{BB'}{\sin \delta} \dots \textcircled{3}'$$

$$\textcircled{1}', \textcircled{2}', \textcircled{3}' \text{ の辺々を加えて } \frac{4}{\sin \gamma} + \frac{3}{\sin \alpha} + \frac{6}{\sin \beta} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sin \delta} = \frac{5}{\sin \delta} \dots \textcircled{4}$$

$$\text{次に } \triangle ABC \text{ において } \frac{6}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \beta} = \frac{3}{\sin \gamma} = K \text{ とおくと}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{K}, \quad \sin \beta = \frac{4}{K}, \quad \sin \gamma = \frac{3}{K} \quad \text{これを}\textcircled{4}\text{へ代入して}$$

$$\frac{4}{\frac{3}{K}} + \frac{3}{\frac{4}{K}} + \frac{6}{\frac{6}{K}} = \frac{5}{\sin \delta} \quad \therefore \frac{4}{3}K + \frac{3}{4}K + \frac{6}{6}K = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)K = \frac{10}{3}K = \frac{5}{\sin \delta}$$

$$\text{ゆえに } \sin \delta = \frac{3}{2K} \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{ を } \textcircled{1}' \text{ へ代入して } \frac{4}{\frac{3}{K}} = \frac{CC'}{\frac{3}{2K}} \quad \therefore CC' \times \frac{3}{K} = \frac{6}{K}$$

$$CC' = \frac{6}{K} \times \frac{K}{3} = 2(\text{cm}) \dots (\text{答})$$

上級問題は、『算法新書』巻の三の「点竄術(てんざんじゅつ)」の「実問」の項、21問のうちの8問めにあります。「点竄術」の「点」は「のこす」、「竄」は「のぞく」の意味(大槻文彦『言海』)で、加減乗除の計算を記号によって表す代数の方法のことです。

原文は以下のとおりです。

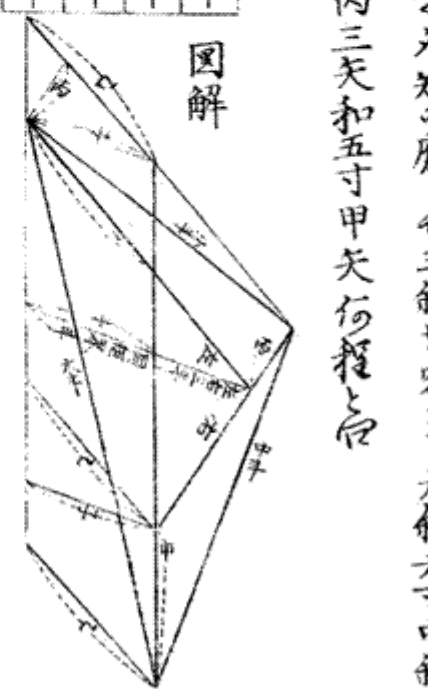
和を除き
三矢和 甲矢あり依る精術を施すと左の如し

術曰大斜を量中斜を以て除き天を小斜を量大斜を以て除き天を加小斜を量中斜を以て除き一個を加へて三矢の和を除き甲矢を以て問ふ合は



式	例	比
○	乙	子
甲	子	○
子	○	丙

図解



三斜の内へ図の如く外矩の應へて三斜を容るる大斜六寸中斜四寸小斜三寸甲乙丙三矢和五寸甲矢何程と問

答曰甲矢二寸

比例ふ仍て子及び丙矢を求む
中斜 子 中斜 乙 大斜 丙 甲乙丙矢相併子を解く

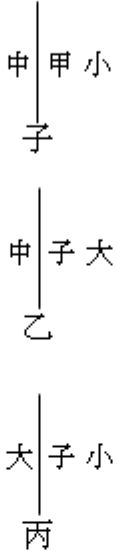
三矢和 三矢和を以て遍甲矢を量き
三矢和 三矢和を以て三矢の

三斜の内へ図の如く外矩に応じて三斜を容る有、大斜六寸、中斜

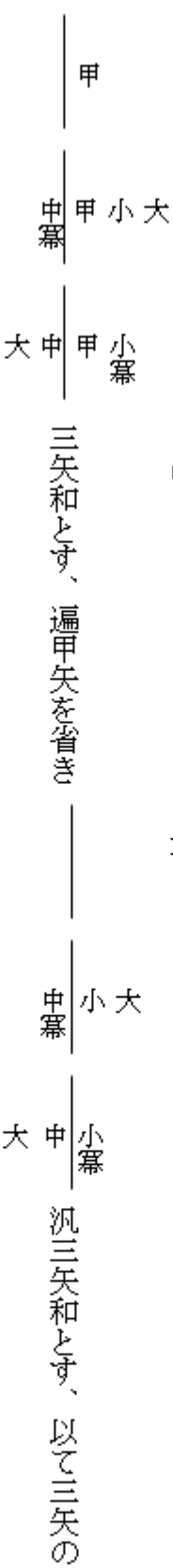
四寸、小斜三寸、甲乙丙三矢和五寸、甲矢何程と問

答曰 甲矢二寸

比例に仍て子及乙丙矢を求む



甲乙丙矢相併子を解く



和を除き 三矢和 甲矢なり、依て精術を施すこと左の如し
汎三矢和

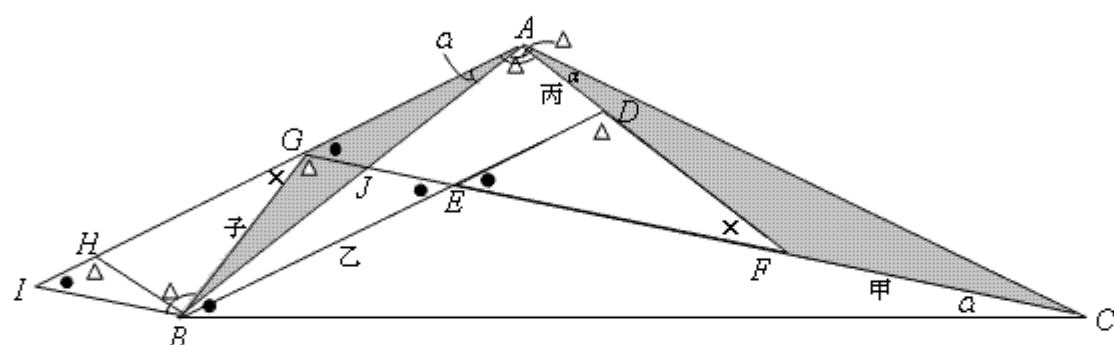
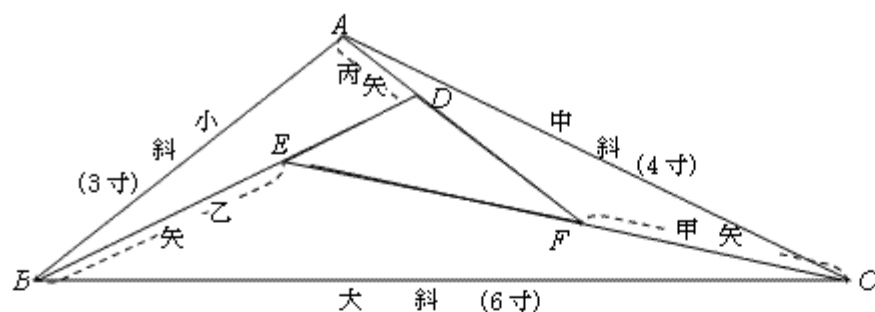
術曰、大斜を置、中斜を以て除き天とす、小斜を置、大斜を以て除き、天を加へ、小斜を乗じ

中斜を以て除き一個を加へ以て三矢の和を除き甲矢を得て問に合す

点竊術による式の表現

甲+乙	甲-乙	甲×乙	甲÷乙
甲 乙	甲 乙	甲乙	乙 甲

三角形の相似を利用して解いているようです。同様の方法で現代風に解くと以下ようになります。



AをとおるBDに、BをとおるECに、それぞれ平行な直線をひき、その交点をIとする

また、BをとおるADに平行な直線とAIとの交点をHとすると $HB = AD = \text{丙矢}$

次に CEの延長とAIとの交点をGとする • $GB = \text{子}$ とおく

$AI \parallel BD$ より $\angle EDF = \angle GAD = \angle BAC$ (条件より)

$\angle GAB = \angle FAC = \alpha$ とする

ここで $\triangle AGJ \sim \triangle BCJ$ ($\because \angle AGJ = \angle CBJ, \angle GJA = \angle BJC$) より

$\angle GAB = \angle BCJ = \alpha$

従って A, G, B, Cは 同一円周上にある これより $\angle BGC = \angle BAC$

次に $\triangle AGB$ と $\triangle AFC$ において $\angle GAB = \angle FAC = \alpha$

$\angle AFC = \angle FED + \angle EDF$ (•印 + Δ印) = $\angle AGB$

$\therefore \triangle AGB \sim \triangle AFC$

$\therefore \frac{\text{甲}}{4} = \frac{\text{子}}{3}$ より $\text{甲} = \frac{4}{3} \times \text{子} \dots \text{①}$

また $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ より $\frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = \frac{DE}{AB} = K$ とおくと

$\parallel \quad \parallel \quad \parallel$
6 4 3

$EF = 6K, FD = 4K, DE = 3K$

次に $\triangle BEG$ と $\triangle DEF$ において $\angle DEF = \angle BEG$, $\angle FDE = \angle EGB$ より $\triangle BEG \sim \triangle DEF$

$$\therefore \frac{\text{乙}}{\text{子}} = \frac{EF}{FD} = \frac{6K}{4K} = \frac{3}{2} \quad \therefore \text{乙} = \frac{3}{2} \times \text{子} \dots \textcircled{2}$$

また 四辺形 $BEGI$ は 平行四辺形であるから $\triangle BEG \cong \triangle BGI$

$$\therefore \angle EGB = \angle GBI \quad (\Delta \text{印}) \quad \text{従って}$$

$$\angle IGB = \pi - (\angle GIB + \angle GBI) = \times \text{印}$$

$$(\bullet \text{印}) \quad (\Delta \text{印})$$

$$\angle IHB = \angle IAD \quad (\Delta \text{印}) \quad \therefore \angle HBI = \angle IGB (\times \text{印})$$

GE

$\parallel$

$$\text{ゆえに } \triangle BHI \sim \triangle BGI \quad \therefore \frac{\text{丙}}{\text{子}} = \frac{HI}{BI} = \frac{BI}{BE} \dots \textcircled{3}$$

$\parallel$

GE

$\parallel$

乙

$$\text{ここで } \triangle DEF \sim \triangle BEG \text{ より } \frac{BE}{EF} = \frac{EG}{ED} = \frac{GB}{DF} = K' \quad \text{とおくと}$$

$$BE = EF \cdot K' = 6KK'$$

$$EG = ED \cdot K' = 3KK' = BI$$

$$GB = DF \cdot K' = 4KK'$$

$\parallel$

子

$$\text{従って } \textcircled{3} \text{ より } \text{丙} = \frac{GE}{BE} \times \text{子} = \frac{3KK'}{6KK'} \times \text{子} = \frac{1}{2} \text{子} \dots \textcircled{4}$$

ここで 甲 + 乙 + 丙 = 5 に ①②④ を代入して

$$\frac{4}{3} \text{子} + \frac{3}{2} \text{子} + \frac{1}{2} \text{子} = 5 \quad \therefore \frac{10}{3} \times \text{子} = 5 \quad \therefore \text{子} = \frac{3}{2}$$

$$\text{従って 甲} = \frac{4}{3} \times \text{子} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2 \quad (\text{寸}) \dots (\text{答})$$