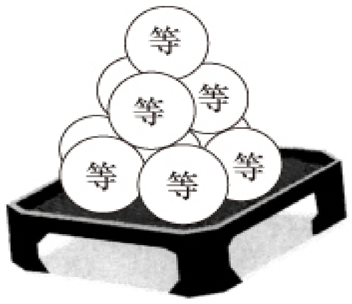
和算に挑戦 －平成 21 年度中級解答例－

中級問題 **（中学生以上向け）**	 明治 34 年(1901)に観福寺(一関市)に奉納された算額の問題です。 **盤の上に図のように、等しい球を 3 段に重ねます。一番下に等球を7個並べ、その上に等球を3個のせ、更にその上に等球を1個のせています。** **等球の直径が1cmの時、盤上から一番上の球までの高さを求めなさい。**

審査員講評

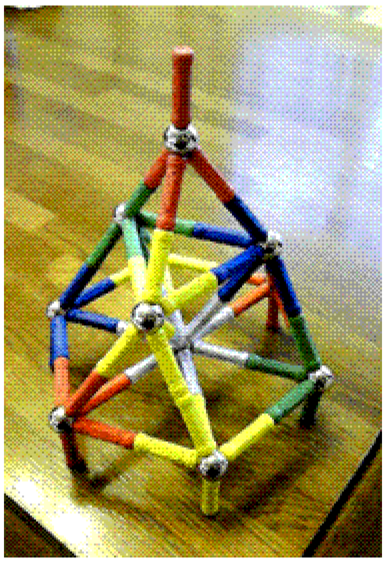
採点者４人は５２０部の解答を凡そ４等分して各々採点しましたが、問題のある解答は出来るだけ複数の採点者で協議して進めました。中級問題は球の積み重ねと云う実験や直感が働きやすい問題であり、中学生が教材慣れしているのか応募も正解も多いと感じました。解法は球の中心が作る正四面体の頂点から底面への垂線の長さを求めるものが殆どでした。また側面から正射影した円の交点から求めるものも見られました。計算手段は三平方の定理(ピタゴラスの定理)が、特に中学生には多く用いられており、ベテランの方々には三角関数や、ベクトルによる計算もありました。

失敗例では、平面的に考えたのか、$1+\sqrt{3}$ の誤りが大変多く見られました。また小数近似した解答では小数第２位程度が正しければ正解にしました。せっかく途中まで正しいのに最後の分数計算で明らかにミスしたものや、直径の代入時の誤りなどで×にしたのは気の毒に思いましたが、やむを得ません。特に受験時の中学生や高校生は注意して頂きたく存じます。正しい数値がでていても、例えば「球の中心を結んで正四面体をつくる」などといった文から直ぐに解答されていたようなものは、説明不足として正答とはしませんでした。

今回の採点で特に感じたのは「和算に挑戦」も真に全国的なものになった、ということでした。今回は海外からの参加はありませんでしたが、北は北海道から南は九州、沖縄まで、年齢は中１から８６歳まで、地元岩手・宮城は少数派になり、兵庫・東京近辺が目をひきました。宿題のような取り扱いをされた学校も多かったらしく、採点者は嬉しい悲鳴を上げました。ただ同じような解答が多く、個人毎の個性が如何に出るかは工夫の余地があると思いました。また答案として提出する以上、書きなぐったようなものや、メモ程度のものなどは少々指導もお願いしたいとも感じました。

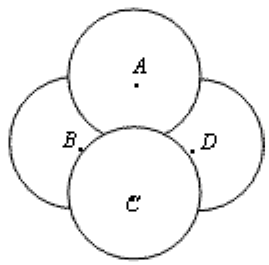
賞の候補の選定には甲乙が付け難く苦心致しましたが、出来るだけ過去に入賞された方でない方をと心がけました。また今回は解法が正四面体(正三角錐)に帰着させるものほぼ１通りで、仕上げの美しさ簡潔さなどを考慮致しましたが、ご不満をお持ちに成られる方も多々おられると存じます。ご容赦願います。

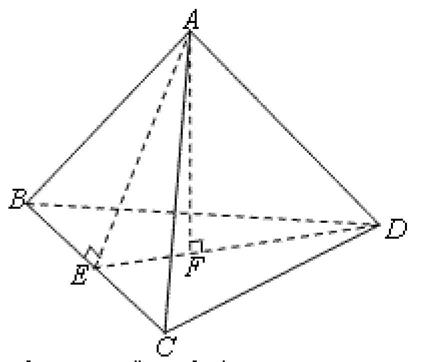
挑戦者の皆様の熱意と根気に敬意を表しまして、講評とさせていただきます。



球状のものを実際に重ねて考えた方も多かったようです。写真は中学3年生が作った模型ですが、棒1本を$\frac{1}{2}$cm、銀の球を円の中心として考えています。

解答例





球の半径をrとし、最上段の球の中心をA、２段目の球の中心を、B、C、Dとする
$\triangle BCD$は正三角形である。
BCの中点をEとし、AからEDに下した垂線の足をFとする
$\triangle AEF$において

$BE = r$、$AB = 2r$より　$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$

$\therefore AE = \sqrt{3}r = ED$

また　Fは$\triangle BCD$の重心であるから　　$EF = \dfrac{1}{3}ED = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r$

$\therefore AF^2 = AE^2 - EF^2 = 3r^2 - \dfrac{1}{3}r^2 = \dfrac{8}{3}r^2$

$\therefore AF = \sqrt{\dfrac{8}{3}} \times r$

次に、球Bの下の段の3つの球についても同じように考えて
盤上から最も上までの高さを求めると

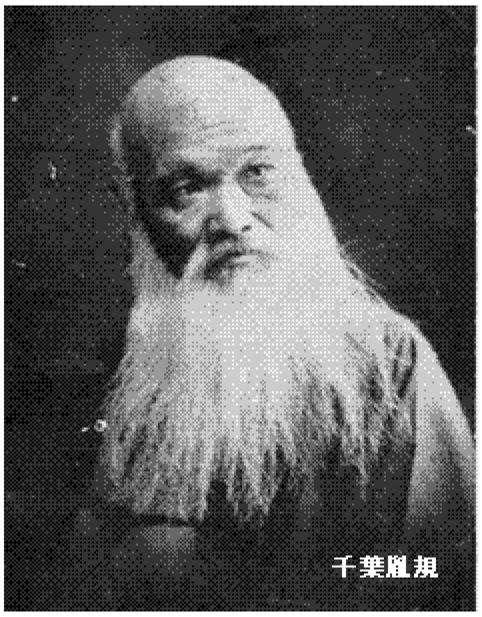
高さは　　$2r + 2\sqrt{\dfrac{8}{3}} \times r = 2r\left(1 + \sqrt{\dfrac{8}{3}}\right) = (\text{等球の直径}) \times \left(1 + \sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$

$\therefore$　高さ$= 1 + \sqrt{\dfrac{8}{3}} \cdots$(答え)

◎中級問題では、$1 + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$の答えが多数でしたが、$1 + \sqrt{\dfrac{8}{3}}$　も同じ値です。

解説

中級問題は、一関市舞川の観福寺観音堂に明治３４年（１９０１)旧暦１１月１７日に、千葉六郎胤規の校閲を受けて、関流十伝小野寺甚七定家の門人３０名が奉納した算額の問題です。この算額は２枚１組となっており、大型の算額で、比較的奉納されたのが新しいので保存状態もよく美しい算額です。


千葉胤規

算額奉納者は、師匠の小野寺甚七も含めて観福寺の近隣の人々で、門人たちは１５～５５歳くらいの人達であったことがわかっています。小野寺甚七は、天保5年（１８３４）生まれで、２１歳の時から農業の合間をぬって本格的に先生について和算を学び、関流十伝となっています。村の収入役を務め、田圃の境界の測量などにも功績があったといいます。教え子たちにも慕われ、没後には顕彰碑が建立されました。校閲をした千葉胤規は、一関の和算家千葉胤秀の孫で、関流九伝の和算家です。千葉胤規は、ちょうどこの年、青少年のための和算の教科書『和算独学前編』を出版していますが、この出版に際して小野寺甚七が貢献し、多くの門人がいることも知れ渡ったので、観福寺観音堂への算額奉納が企画されました。千葉胤規は、校閲だけでなく筆記も含め実際に算額の製作にも関わっています。製作に関する経費は、当時のお金で４１円１２銭９厘を要したことがわかっています。

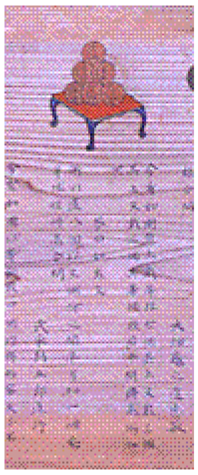
さて、中級の問題は第２額の２番目にあり、氏家勘五郎直行の提出したものです。算額には次のように描かれています。

今有如図盤上載等球七個其上又載三個
其上又載一個其等球径若干問得高術如
何

答曰如左文

術曰置八個以三個除之開平方加一個乗
等球径得高合問

氏家勘五郎直行



現代訳

問題　今、図のように盤上に、等球が７個、その上にまた３個、その上にまた１個のっている。
等球の径を若干とするとき、高さを得る術はどうか。

答え　左の文のとおり

術　８を３でわり、この平方根に、１を加え等球径をかければ、高さとなる。

現代風の式にすれば、$\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+1\right)\times(\text{等球の直径})=(\text{求める高さ})$　となる。

この式に至る解き方は不明ですが、現代の人たちと同様に重ねた３個の球の中心を結ぶ線を使って以下のように解いたと推定されます。術文は解答例の答えと同じです。