和算に挑戦 －平成 22 年度初級解答例－

初級問題（小学生以上向け）

文化 12 年(1815)に出版された『算法点竄指南録(さんぽうてんざんしなんろく)』の問題です。

米をたくわえた蔵(くら)があります。蔵の中から、初日に 1 石(こく)を出します。次の日に 3 石、また次の日に 7 石、その次の日に 11 石、その次の日に 15 石を出す、というように米を出していくと、30 日で蔵はからになりました。はじめに入っていた米は何石でしょうか。

※石は、米をはかる単位です。(1 石=10 斗=100 升)

審査員講評

今回の応募は一人で複数解の解答も含めて延べ数７０９で、昨年度より多い解答数でした。最年少は小学校１年生、最高齢は８７歳の方で、全世代に亘っておりました。小・中学生からの応募が多く、学校独自に工夫された解答用紙をつくってのまとめての応募などがありました。応募いただいた皆さんの熱心な取り組みに敬意を表するとともに、心から感謝いたします。

解答は大きく分けて、１日目から３０日目まで各々の石数を求めてそれを合計したものと、その数を加えていく計算の中で規則性を発見して計算の方法を工夫したもの、そして、中・高校生になるにしたがって数列の和の公式を用いて、という解き方でした。１日目から２日目の増加の仕方と、２日目からの増加の仕方が違うために計算に不安を感じたとの感想もありました。とまどいを与えたかも知れませんが、問題を正確に読みとることも大事なことと受けとめてもらえば幸いです。残念な例では、３０日目に出す量だけを求めて終わっている答案がありました。また、どのようにして求めたのかを含めて採点していますので、結果の数値だけ書かれている場合は正解とはしていませんので、ご了承ください。１日目から２日目の増加の石数と２日目以降の増加の石数の違いのこともあり、２日目以降からは４石ずつ増えていって３０日目まで出したとき、とでも表現を補充しておけば問題文がもう少し理解しやすかったのかもしれません。それぞれの解答に添えられた感想も含め、今後の出題の参考にしたいと思います。

小学生の答案の中には、１日目から３０日目までの各々の日の石数を数え上げ、その和の計算法をいろいろ考えていく中で、図や表を用いての計算の工夫や、$S=3+7+11+\cdots+115$を計算するためにその並びを逆にした和 $S=115+111+\cdots+11+7+3$を考え、各項を加えた数の和がどれも118になるので、$2S=118\times29$、よって $S=118\times29\div2$で計算し、１日目の分の１石を加えて正解を求めるなど、いろいろな考え方に富んだ答案が多数ありました。頼もしい限りです。

解き方を考えていく中で、いろいろな工夫、考えがひらめいて胸を躍らしている様子が感じられ、また、祖母や母と一緒にやってみたとか、姉と挑戦したとか、家族みんなで問題に取り組んだ様子がコメントされている答案も多く、出題に携わっている我々にとりましても嬉しいことでした。

今年の「和算に挑戦」も終わりました。応募いただいた皆様、ありがとうございました。次回も沢山の応募を期待しまして、採点と審査の報告とさせていただきます。

解答例

解答例 1

各日、米を出す数を表にすると次のようになる

日数	1	2	3	4	5	6	7	8	----	22	23	24	25	26	27	28	29	30
出す石数	1	3	7	11	15	19	23	27	----	83	87	91	95	99	103	107	111	115

2 日めから 30 日めまでの石数を加える式は、　$S=3+7+11+\cdots+115$　となる。
これを計算するためにその並びを逆にした和　$S=115+111+\cdots+11+7+3$　を、
各項を加えた数の和は、どれも 118 になる。
従って　$2S=118\times(30-1)$
よって　$S=118\times 29\div 2=1711$
これに、初日の 1 石を加えて　$1711+1=1712$

（答）　１７１２石

解答例 2

蔵にはいっていた米 $=1+(3+7+11+15+\cdots\cdots+115)$

(　　)は初項 3、交差 4、項数 29の等差数列の和

$$=1+\frac{29\{2\times 3+(29-1)4\}}{2}$$
$$=1+29\times 59=1+1711=1712$$

（答）　１７１２石

解答例 3

蔵にはいっていた米 $=1+3+7+11+15+\cdots\cdots$
$=2+(-1+3+7+\cdots\cdots)$　　初項-1、公差4、項数nとする
$$=2+\frac{n\{2\times(-1)+(n-1)4\}}{2}=2+n(2n-3)=2n^2-3n+2=n+2(n-1)^2$$
$n=30$のとき　蔵にはいっていた米 $=30+2(30-1)^2=1712$

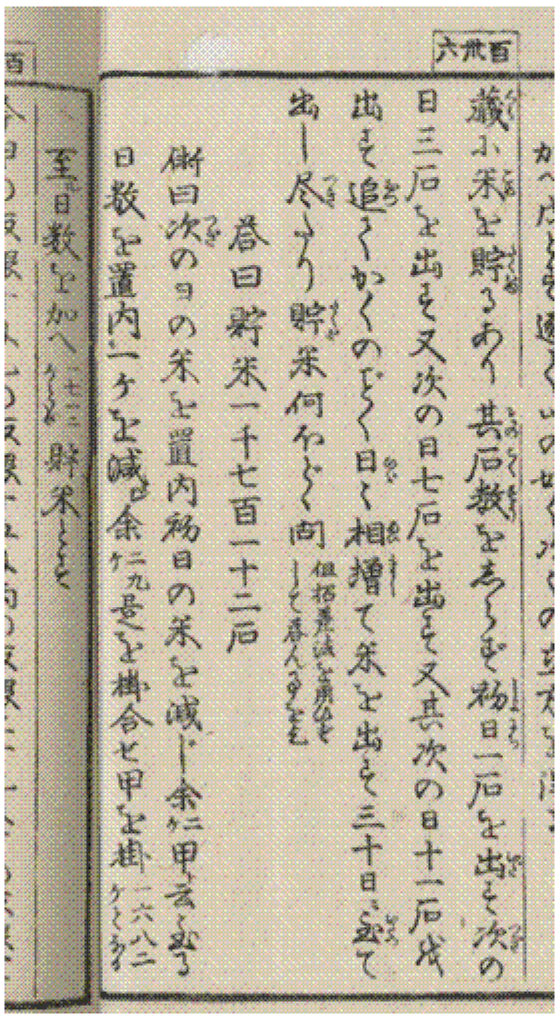
（答）　１７１２石

初級問題

初級問題は、文化１２年(1815)に出版された『算法点竄指南録』にある問題です。「点竄術」の「点」は「のこす」、「竄」は「のぞく」の意味で、加減乗除の計算を記号によって表す代数の方法のことです。

『算法点竄指南録』は、15 巻からなり、１９６の問題と解説が記されています。初級の問題は、第１３６問として２巻に問題、８巻に解説があります。原文は下のように、４日めまでの出す石数を示していましたが、今回の和算に挑戦ではさらに５日目を１５石と追加して出題しました。

《原　文》



蔵に米を貯るあり、其石数をしらず、初日一石を出す、次の日三石を出す、又次の日七石を出す、又其次の日十一石を出す、追てかくのごとく日々相増て米を出す、三十日ニ至て出し尽たり、貯米何ほどと問う　但、招差法を用いずして答ん事を乞

答曰　貯米一千七百一十二石

術曰次の日の米を置、内初日の米を減じ余ケ二甲ト云、至ル日数を置、内一ケを減じ余ケ二九、是を掛合せ甲を掛一六八二ケとなる

至ル日数を加へ一七一二ケと成　貯米とす

現代訳

《問題》　蔵に米を貯えている、その石数はわからない、初日に１石を出す、次の日に３石を出す、又次の日に７石を出す、又その次の日に１１石を出す、このように日々増して米を出す、３０日に至って出し尽きた時、貯米はいくらであったか。

但し招差法を用いずに答えること

《答》　貯米　１７１２石

《術》　次の日の米を置き、そこから初日の米を減じ余り２、これを甲とする。至る日数（３０日）を置き、そこから１を減じ余り２９、是を掛け合わせ甲を掛け１６８２となる、至る日数を加え１７１２と成る。これが貯米である。

式にすると　３－１＝２・・・甲

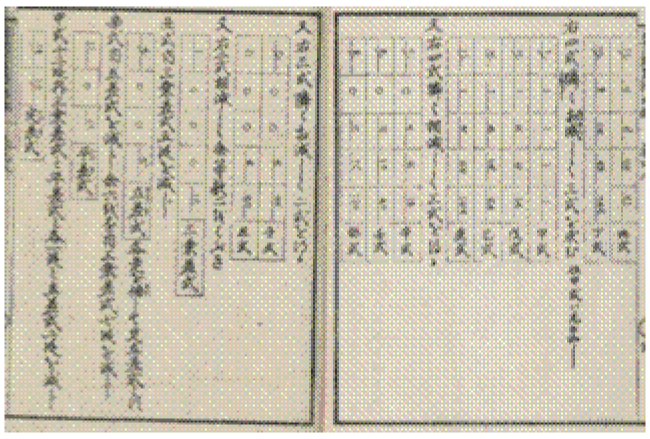
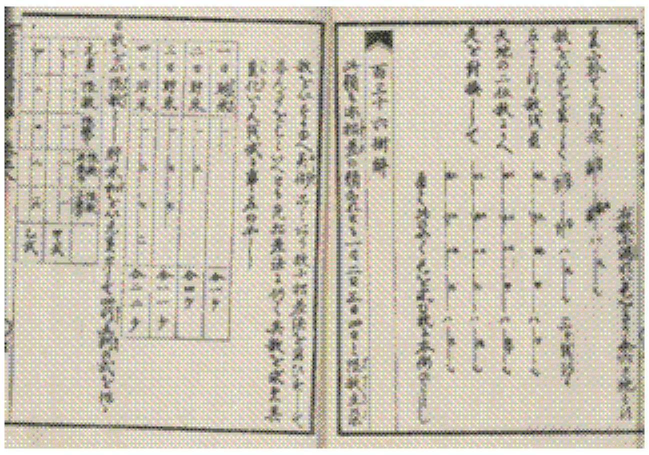
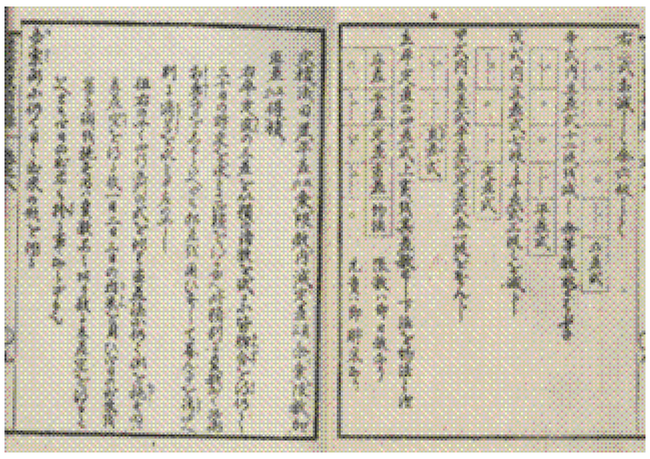
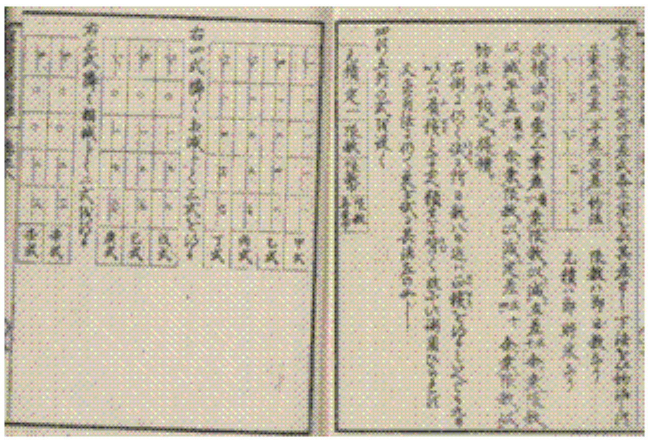
３０－１＝２９

２９×２９×２＝１６８２

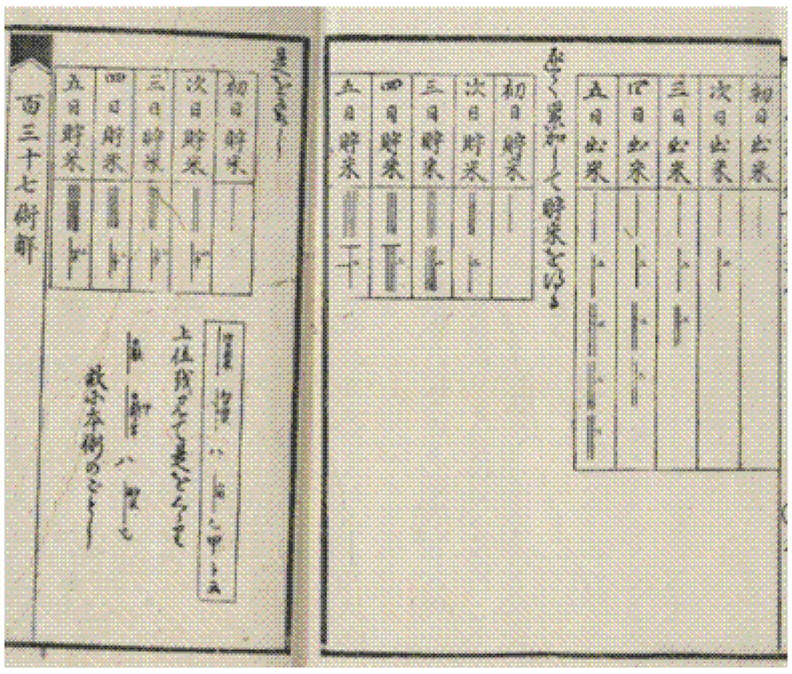
１６８２+３０＝１７１２

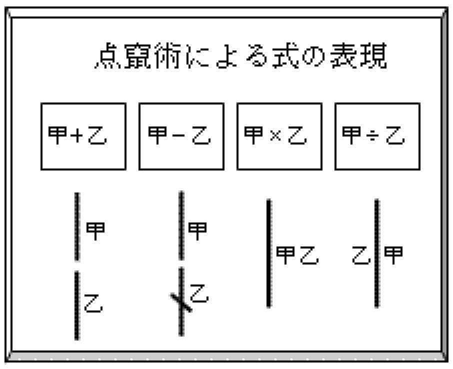
次に８巻の解説を掲載します。

写真の通り、１０頁にわたる解説がありますが、最初に、この問題は招差の問題であるが特殊なものなのでさまざまな術があるとし、招差法、直差法という和算の方法による解を検討しています。

最後に歩索術（ほさくじゅつ）による解法を出しています。





上の３つの表を現代風にまとめると、下の表になります。

	出米（その日に出す米）	累加して貯米を得る（＝その日までに出した米）	左を変形した式
初日	1	1	1
次日	１＋１×２	２＋１×２	$２＋１^2×２$
３日	１＋１×２＋２×２	３＋４×２	$３＋２^2×２$
４日	１＋１×２＋２×２＋２×２	４＋８×２	$４＋３^2×２$
５日	１＋１×２＋２×２＋２×２＋２×２	５＋１６×２	$５＋４^2×２$

表より

３（次日出米*）－１（初日の出米）＝２・・・・甲とする

*原文では「貯米」となっているが、出米の誤りと思われる。

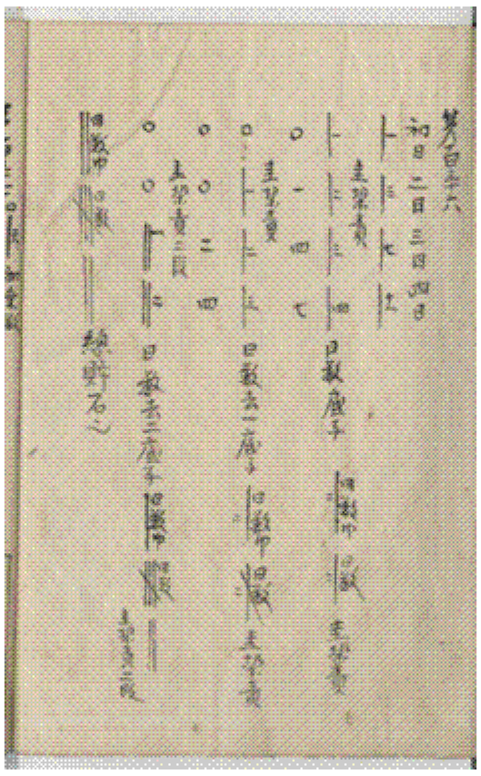
日数＋（日数－１）^{2}× 甲　＝貯米　となる(術文と同じ)

※３０日の場合　　３０＋(３０－１)^2 ×２＝３０＋８４１×２

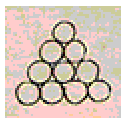
＝３０＋１６８２

＝１７１２　　　　　<u>(答) １７１２石</u>

一関の和算家千葉胤秀（1775-1849）が、この問題を解いたノートが残っています。左の写真のページです。



この中に「圭垜責（けいだせき）」という言葉がでてきますが、
「圭」は二等辺三角形、「垜」は積み重ねるという意味で、
圭垜は、俵や団子などを積み重ねたときの個数にみられるような数で、
数列　1、2、3、4、・・・、n　のこと、

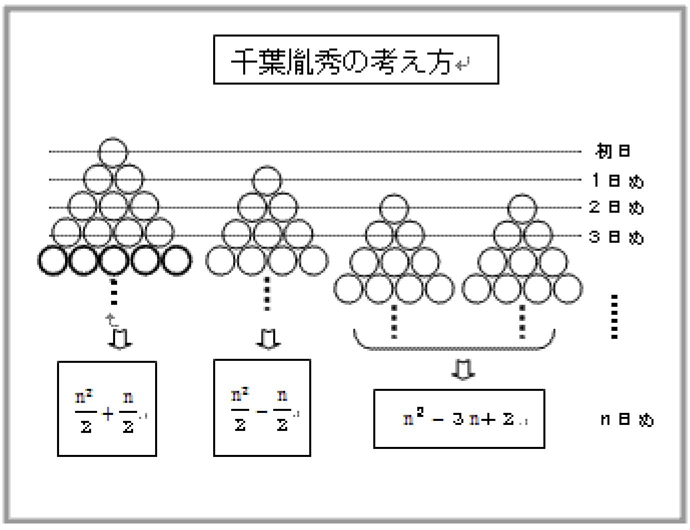


圭垜責は、その和で、

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$　のことです。

胤秀は、圭垜責とこの問題の数を比較し、圭垜責を求める式

$$\frac{\text{日数}^2}{2}+\frac{\text{日数}}{2}=\text{圭垜責}$$　を利用して、以下のように考えてます。



日数をn（自然数）とする
初日から圭垜積みをすると、積む数S_1は

$$S_1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\cdots①$$

さらに2日めから圭垜積みをすると、
積む数S_2は

$$S_2=\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{(n-1)}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\cdots②$$

上の二つの圭垜責の合計と、問題の
出石数との差は、
0、0、2、2×2…となり、
3日め以降は、圭垜責が2つ分加えられていると考えられる。

従って、出石数との差の総数S_3は

$$S_3=2\left\{\frac{(n-2)^2}{2}+\frac{(n-2)}{2}\right\}=n^2-4n+4+n-2=n^2-3n+2\quad\cdots③$$

求める貯米S＝①＋②＋③であるから

$$S=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+n^2-3n+2$$
$$=2n^2-3n+2$$

問題は30日なので、　$2\times30^2-3\times30+2=1712$　　（答）　1712石