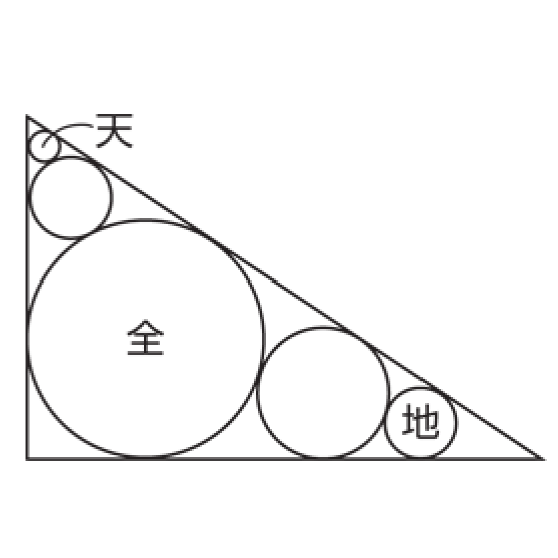
和算に挑戦 ー平成 22 年度上級解答例ー

上級問題 (高校生以上向け)	 一関の和算家千葉胤秀(たねひで)が編集した『算法新書』(文政 13 年(1830)刊行)にある問題です。 **図のように 5 つの円が互いに接して、直角三角形に内接しています。** **天円の直径が 6.04cm、地円の直径が 12.08cm のとき、** **全円の直径を求めなさい。**

審査員講評

与えられた条件、示された図形のちょっとした手がかりをもとに解に至るには、かなりの時間が必要です。たいていは道筋を発見するまで大変苦労のある作業が続きます。手強く、難渋することが多いのが和算です。解けたときの醍醐味が格別な所以です。以前に解いた類似の結果の活用も有効です。この問題の場合、洞察力のほかに、かなりの計算力も要求され、秘められた糸をほぐすのに強い力が試されます。

答案では、途中でやめている人々は一様に計算が複雑なことや、４次方程式が解けないとの解答をもらしていました。

誤答が多いのも特色でした。また近似値を求める場合、どの部分から数値を導入するかで微妙な差もでます。中学生の答案では、相似と合同だけでは、とりかかりがつかめないのが目につきました。

今回初めてアメリカから英文の解答（勿論正解でした）も頂きました。また高齢の方々の正解が多かったのが今年の特徴です。

正解の答案は、概ね次の二つでした。

① 三角比を利用したもの

② 三角関数を利用したもの

誤答として、最後まで論理が不明で結果を導き出せなかった答案、途中まで考え方が正しいのに数値代入の段階で計算ミスをしたものがありました。計算力を必要とする問題でしたが、正解された方々の答案はさすがしっかり進められていました。

計算の途中に$\sqrt{2}$や$\sqrt[4]{2}$の値が出てまいりますが、$\sqrt{2} = 1.414$、$\sqrt[4]{2} = 1.189$(小数第 3 位まで)で計算すると誤差が大きくなります。和算家は、もう少し多い桁数までソロバンを使って計算しておりました。

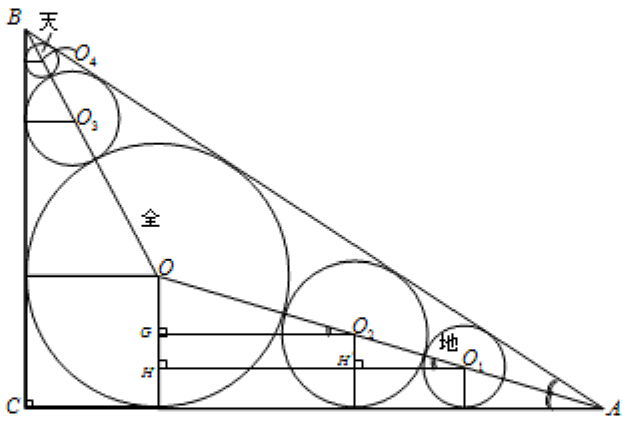
正答率は、５５．４％（答案数９２）で、過去の上級問題では第４回の５０％に次いで低い値でした。やはり計算が面倒だったことも影響しているのだと思いました。

今年も２通り、３通りの解答を提出された方々が数名おり、よく勉強されていると感じました。

解答例

全円$O(r)$、地$O_1(r_1)$、$O_2(r_2)$、$O_3(r_3)$、天$O_4(r_4)$とする(括弧内のrは各円の半径)

図で　(円O、O_1、O_2について)



$$\tan\frac{A}{2}=\frac{OG}{O_2G}$$

$$=\frac{O_2H'}{O_1H'}\quad \cdots\cdots(1)$$

ここで

$$O_2G=2\sqrt{rr_2}、\ OG=r-r_2$$

$$O_1\mathrm{H}'=2\sqrt{r_1r_2}、\ O_2H'=r_2-r_1$$

したがって

$$\frac{r-r_2}{2\sqrt{rr_2}}=\frac{r_2-r_1}{2\sqrt{r_1r_2}}$$

分母を払って整理をする

$$(r-r_2)\sqrt{r_1}=(r_2-r_1)\sqrt{r}$$

$$r\sqrt{r_1}-r_2\sqrt{r_1}=r_2\sqrt{r}-r_1\sqrt{r}$$

$$\sqrt{r}\sqrt{r_1}\left(\sqrt{r}+\sqrt{r_1}\right)=r_2\left(\sqrt{r}+\sqrt{r_1}\right)\qquad \therefore\ r_2=\sqrt{r_1}\sqrt{r}$$

同様にして、円O、O_3、O_4について　$\therefore\ r_3=\sqrt{r_4}\sqrt{r}$

ここで　$r_1=\dfrac{12.08}{2}=6.04$、　$r_4=\dfrac{6.04}{2}=3.02$であるから

$$\sqrt{r_1}=\sqrt{6.04}=\sqrt{2\times3.02}=\sqrt{2r_4}=\sqrt{2}\sqrt{r_4}\qquad \therefore\ r_1=2r_4$$

これにより

$$r_2=\sqrt{2}\sqrt{r_4}\sqrt{r}、\quad r_3=\sqrt{r_4}\sqrt{r}\quad \cdots\cdots(2)$$

次に

$A+B=\dfrac{\pi}{2}$であるから　$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

つまり　$\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

左辺を展開して、整理をすれば

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\quad \cdots\cdots(3)$$

(1)と同様にして　$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r-r_3}{2\sqrt{rr_3}}$　であるから、(3)に代入して変形すると

$$\frac{r-r_2}{2\sqrt{rr_2}}+\frac{r-r_3}{2\sqrt{rr_3}}=1-\frac{r-r_2}{2\sqrt{rr_2}}\cdot\frac{r-r_3}{2\sqrt{rr_3}}$$

rについて整理し

$$r^2+2\left(\sqrt{r_3}+\sqrt{r_2}\right)r\sqrt{r}-\left(r_2+r_3+4\sqrt{r_2r_3}\right)r-2\left(r_2\sqrt{r_3}+r_3\sqrt{r_2}\right)\sqrt{r}+r_2r_3=0$$

$\sqrt{r}=t>0$　とおくと、上式は

$$t^4+2\left(\sqrt{r_3}+\sqrt{r_2}\right)t^3-\left(r_2+r_3+4\sqrt{r_2r_3}\right)t^2-2\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)t+r_2r_3=0$$

両辺を$t^2\neq 0$　で割ると

$$t^2+2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)t-\left(r_2+r_3+4\sqrt{r_2r_3}\right)-\frac{2\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)}{t}+\frac{r_2r_3}{t^2}=0$$

変形して

$$\left(t^2+\frac{r_2r_3}{t^2}\right)+2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}{t}\right)-\left(r_2+r_3+4\sqrt{r_2r_3}\right)=0$$

$$\therefore\left(t-\frac{\sqrt{r_2r_3}}{t}\right)^2+2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{r_2r_3}}{t}\right)-\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2=0$$

これより(解の公式で)(負の解は不適)※1

$$\begin{aligned}t-\frac{\sqrt{r_2r_3}}{t}&=-\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2+\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2}\\&=-\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore t-\frac{\sqrt{r_2r_3}}{t}=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)$$

$$\therefore t^2-\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)t-\sqrt{r_2r_3}=0$$

これより

$$t=\sqrt{r}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2+4\sqrt{r_2r_3}}}{2}$$

$t>0$より

$$t=\sqrt{r}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2+4\sqrt{r_2r_3}}}{2}$$

よって　$r=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2+4\sqrt{r_2r_3}}\right\}^2$

(2)より　$\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}=\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{r_4}}\sqrt{\sqrt{r}}+\sqrt{\sqrt{r_4}}\sqrt{\sqrt{r}}=\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{r_4}}\sqrt{\sqrt{r}}$

$\sqrt{r_2}\cdot\sqrt{r_3}=\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{r_4}\sqrt{r}$

したがって

$$\begin{aligned}r&=\frac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{r_4}}\sqrt{\sqrt{r}}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2\sqrt{r_4}\sqrt{r}+4\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{r_4}\sqrt{r}}\right\}^2\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{r_4}}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2\sqrt{r_4}+4\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{r_4}}\right\}^2\sqrt{r}\end{aligned}$$

$r \neq 0$であるから

$$\therefore \sqrt{r} = \frac{1}{4}\left\{(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{r_4}} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2\sqrt{r_4} + 4\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{r_4}}\right\}^2$$

よって$(r \neq 0)$

$$r = \frac{1}{16}\left\{(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{r_4}} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2\sqrt{r_4} + 4\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{r_4}}\right\}^4$$

ここで

$r_4 = 3.02$

$\sqrt{2} - 1 = 0.41421356237\cdots$

$(\sqrt{2}-1)^2 = 0.17157287525\cdots$

$\sqrt{\sqrt{2}} = 1.189207115\cdots$

$\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2 = 4.79262779236\cdots$

$\sqrt{3.02} = 1.73781471969\cdots$

$\sqrt{\sqrt{3.02}} = 1.31826200722\cdots$

$(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)\sqrt{\sqrt{3.02}} = 1.19539903618\cdots$

$(\sqrt{2}-1)^2\left(\sqrt{\sqrt{2}}+1\right)^2\sqrt{3.02} = 1.42897885572\cdots$　　　であるから

近似値で

$$r \fallingdotseq \frac{1}{16}\left\{1.19539903618 + \sqrt{1.42897885572 + 8.266485168}\right\}^4$$

$$= \frac{1}{16} \times 4.30915326098$$

$$= 21.5500250796$$

$2r = 43.1000501592$

$\therefore$ 全径$(2r) \fallingdotseq 43.1$　　　　　(答え)　43.1*cm*余

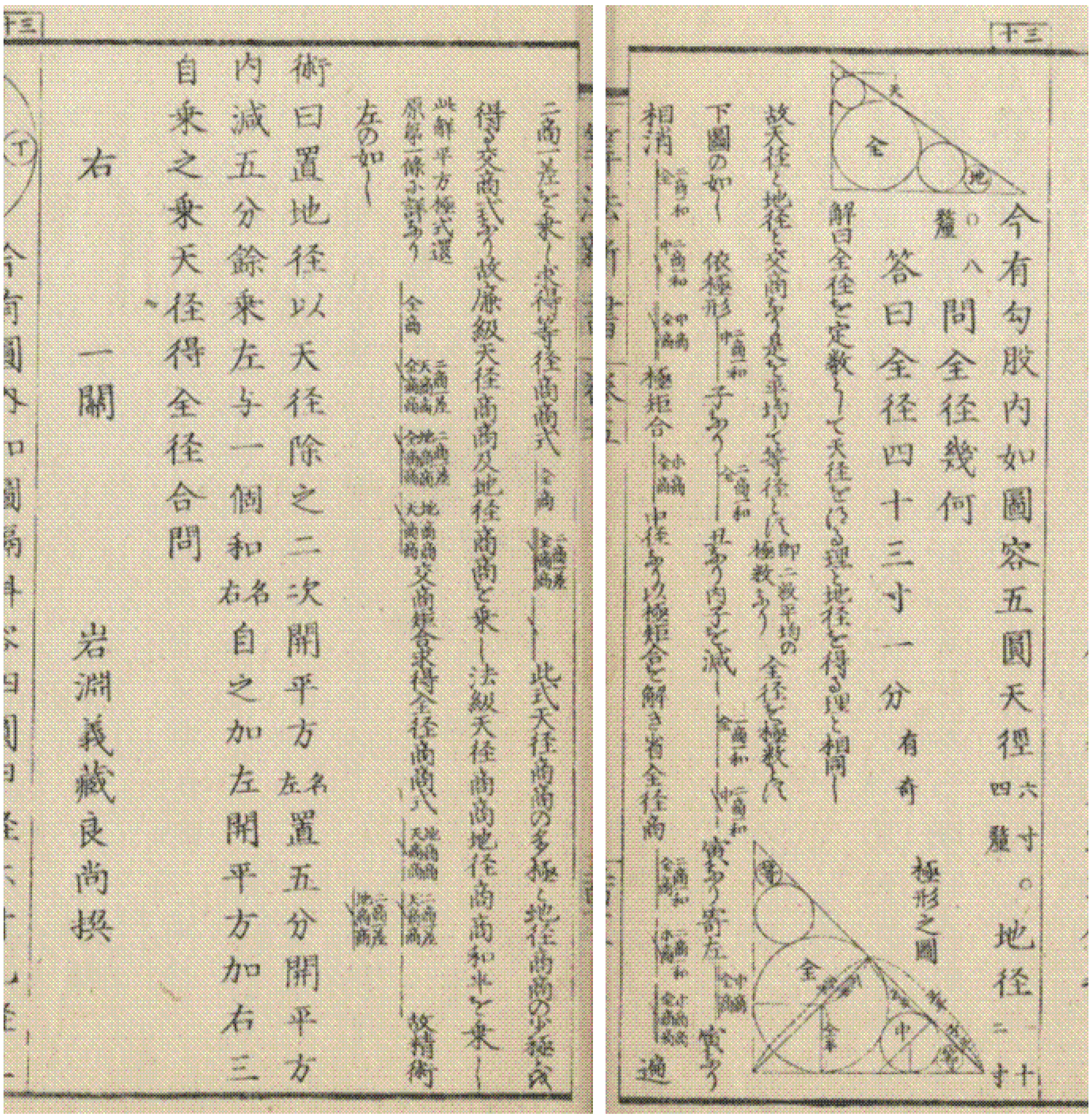
※1　$\sqrt{r} > \sqrt{r_2}$、$\sqrt{r} > \sqrt{r_3}$より

$t^2 = \sqrt{r}\sqrt{r} > \sqrt{r_2}\sqrt{r_3}$により　$t - \dfrac{\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}{t} = \dfrac{t^2 - \sqrt{r_2}\sqrt{r_3}}{x} > 0$

上級問題

上級問題は、一関の和算家千葉胤秀編(文政 13 年(1830)刊)『算法新書』巻の五の附録「極形術用法」の第３０問です。この附録の部分は、千葉胤秀の門弟 52 人が問題を提出しています。

原文は以下のとおりです。


今有勾股内如圖容五圓天徑六寸四釐〇地徑二寸〇八釐問全徑幾何

答曰全徑四十三寸一分有奇

極形之圖

解曰全徑を定数として天徑を得る理と地徑を得る理と相同し

故天徑と地徑を交商すれハ即二数平均の全徑と極数となり 全徑と極数とハ下圖の如し

二商一差と乗し求得等徑商商式 此式天徑商商の多極と地徑商商の少極と得る交商式なり故廉級天徑商商及地徑商商と乗し法級天徑商商地徑商商和半と乗し

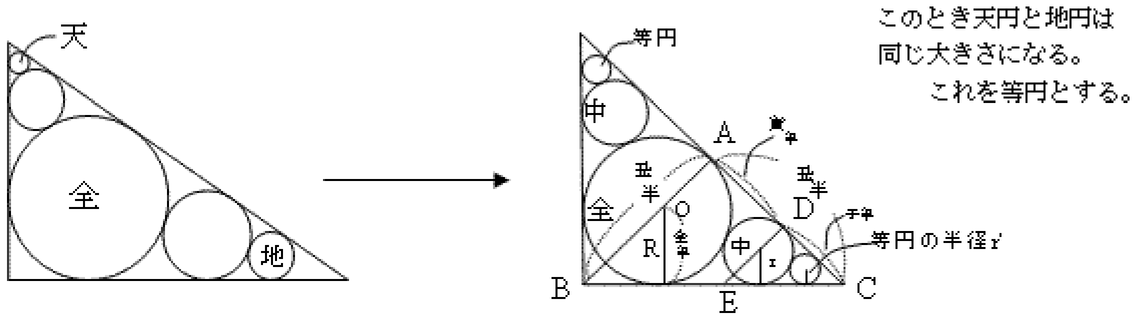
此解平方極式還原等一條に詳なり 故精術左の如し

術曰置地徑以天徑除之二次開平方名左置五分開平方内減五分餘乘左与一個和名右自之加左開平方加右三自乘之乘天徑得全徑合問

右 一關 岩淵義藏良尚撰

解　説

千葉胤秀の師であり、『算法新書』の校閲者にあたる江戸の和算家長谷川寛の考えた極形術によって解いています。問題の図の全円の半径は変えないで、直角三角形を直角二等辺三角形にした図を極形の図としています。



極形の図

極形の図において　$CD=\frac{1}{2}$子、　$DA=\frac{1}{2}$寅、　$CA=\frac{1}{2}$丑$=AB$

全円の半径をR、中円の半径をr、等円の半径をr'とおくと

$\frac{1}{2}$子$=CD=DE=\sqrt{2}r+r=\left(\sqrt{2}+1\right)r$　　　$\therefore$ 子$=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2r\cdots$①

また　$\sqrt{2}R+R=AB=\frac{1}{2}$丑　　　$\therefore$ 丑$=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2R\cdots$②

次に　$\frac{1}{2}$丑$-\frac{1}{2}$子$=\frac{1}{2}$寅　　より　丑$-$子$=$寅　　　この式に①②を代入して

$\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2R-\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2r=$寅　　また　$\frac{1}{2}$寅$=\sqrt{2R\cdot 2r}$　　より　　寅$=2\sqrt{2R\cdot 2r}$

$\therefore \left(\sqrt{2}+1\right)2R-\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2r-2\sqrt{2R\cdot 2r}=0\cdots$③(この式を極矩合という)

補助定理1より　$2r=\sqrt{2r'}\sqrt{2R}\cdots$④　　　④を③に代入して

$\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 2R-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2r'}\sqrt{2R}-2\sqrt{2R}\sqrt{\sqrt{2r'}\cdot\sqrt{2R}}=0$　　$\sqrt{2R}$で割ると

$\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2R}-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2r'}-2\sqrt{\sqrt{2r'}\cdot\sqrt{2R}}=0$　　　この式に$\left(\sqrt{2}-1\right)$を乗ずると

$\sqrt{2R}-\sqrt{2r'}-2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\sqrt{2r'}\cdot\sqrt{2R}}=0$

ここで　$\sqrt{\sqrt{2r'}}=\sqrt[4]{2r'}=x$　とおくと　$\sqrt{2R}-2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[4]{2R}x-x^2=0$

この式のx^2の項に$\sqrt{\sqrt{\text{天円の直径}}}\sqrt{\sqrt{\text{地円の直径}}}$を代入、$x$に$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{\text{天円の直径}}}+\sqrt{\sqrt{\text{地円の直径}}}\right)$

を代入すると

$\sqrt{2R}-2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[4]{2R}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)-\sqrt[4]{6.04}\sqrt[4]{12.08}=0$

ここで　$\sqrt[4]{2\mathrm{R}}=t$　　とおくと

$$t^2-\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)t-\sqrt[4]{6.04}\sqrt[4]{12.08}=0$$

これを解いて

$$t=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)\pm\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)^2+4\sqrt[4]{6.04}\sqrt[4]{12.08}}}{2}$$

ここで　$\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}=3.43199056779$

$\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)^2=11.7785592573$

$\left(\sqrt{2}-1\right)^2=0.17157287525$

$\sqrt[4]{2}=1.189207115$　　　　$\sqrt{6.04}=2.45764114548$

$4\sqrt[4]{6.04}\sqrt[4]{12.08}=4\sqrt[4]{2}\sqrt{6.04}=11.6905773452$

従って　$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)=1.4215770391$

$\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt[4]{6.04}+\sqrt[4]{12.08}\right)^2+4\sqrt[4]{2}\sqrt{6.04}}=3.70289867849$

これより　分子$\sqrt{\ }$の前の符号は－は不適なので+をとると

$t=2.56223785879$

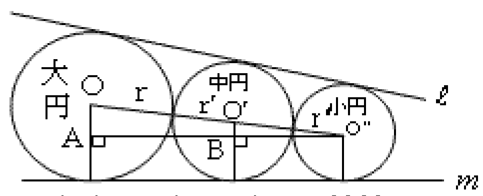
$2R=t^4$を求めると

43.1000501589　となる

(答)　43寸1分有奇

有奇は、小数が続くときに、小数部分を省くという意味

〔補助定理 1〕



大、中、小の三円が図のように互いに外接し、l、mにも接しているとき

中円の直径 = $\sqrt{\text{大円の直径}\times\text{小円の直径}}$　　である

(証明)　　大円、中円、小円の半径を、それぞれr、r'、r''とする

図において　　$\triangle O''O'B \backsim \triangle O''OA$であるから

$O''O':O'B=O''O:OA$　　従って　　$r'+r'':r'-r''=r''+2r'+r:r-r''$

$\therefore\ (r'+r'')(r-r'')=(r'-r'')(r''+2r'+r)$　　展開して

$\cancel{r'r}-\cancel{r'r''}+rr''-\cancel{r''^2}=\cancel{r'r''}+2r'^2+\cancel{rr'}-\cancel{r''^2}-2r'r''-rr''$

$\therefore\ 2r'^2=2rr''$　　　ゆえに　$(2r')^2=2r\cdot 2r''$

すなわち　　中円の直径 = $\sqrt{\text{大円の直径}\times\text{小円の直径}}$