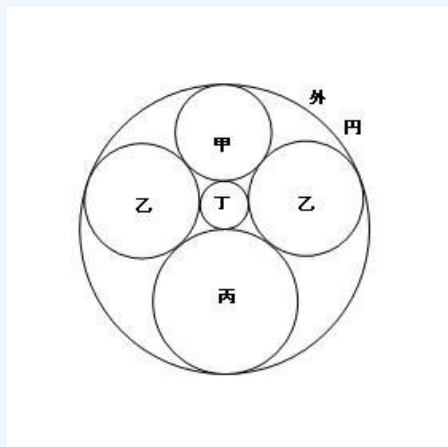


上級問題
(高校生以上向け)



一関の和算家千葉胤秀が編集した『算法新書』(文政 13 年(1830)刊行)の巻の五にある問題です。

外円内に5つの円が図のように内外接しています。外円の直径は6寸、甲円の直径が2寸のとき、丙円の直径を求めなさい。

審査員講評

上級問題には、139 通の応募がありました。小学生が 1 人、中学生 10 人、高校生 7 人、この外一般の男子 103 人、女子 17 人でした。年齢別では、10 代が 2 人、多い方では 90 代 1 人、80 代 2 人、70 代 12 人あとは 20 代から 60 代までの方々でした。50 代・60 代がともに 28 人で、30 代・40 代はそれより少なかったのは予想外でした。

正答率は 54.8%と初級・中級に比べて低かったのは、答が合っているにもかかわらず最初の図で外円の中心を丙円と丁円の接点にとった人が多く、これでは丙円は計算しなくても 3 寸と自明なので、このような答えは正解としなかったからだと思います。また説明不十分、つまり考えの根拠がなく突然使われる式のため誤答になった例もありました。

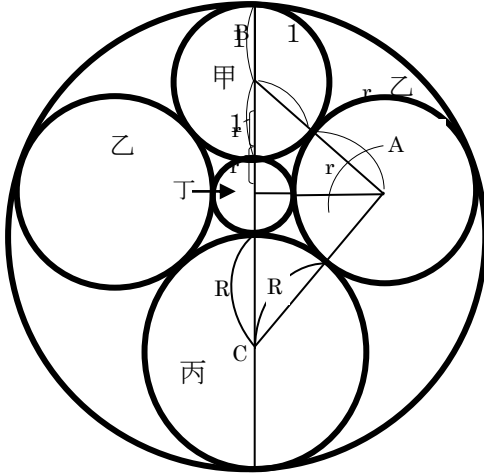
正答としては既知の定理を問題にうまく利用して解いた見事な答案もありました。スチュアートの定理（三平方の定理の拡張）、余弦定理、円環に関するシュタイナーの定理などを使って解答したもの、座標を設定して解いたもの、図形の相似形を利用したもの、ヘロンの公式を用いたもの、反転を利用したものなどがありました。

丁寧すぎるほどの説明があった反面、根拠がはっきりしない解、しかも簡単に答にたどりついたものなど多様でした。

また、解答の進め方、作り方に第三者に見せる工夫が欲しいもの、論理を整理して表現する点で努力が欲しいものもありました。

155 件の解答でしたが、本当に色々な解答があり我々も大変勉強させられ、大変楽しい審査でした。

解答例



外円径=6 甲円の半径=1 乙円の半径= r

丙円の半径= R 丁円の半径= r' とする

条件より $2+2r'+2R=6 \therefore r'+R=2 \dots \textcircled{1}$

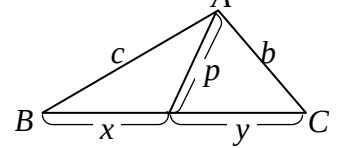
次に $\triangle ABC$ でスチュワートの定理を用いると

$$(R+r)^2(r'+1)+2(r+1)^2=(r'+3)\{(r+r')^2+2(r'+1)\}$$

①を代入して r' を消去する

$$(R+r)^2(3-R)+2(r+1)^2=(5-R)\{(r+2-R)^2+2(3-R)\} \dots \textcircled{2}$$

スチュワートの定理



$$b^2x+c^2y=a(p^2+xy)$$

$$\text{ただし } a=x+y$$

※
また $\frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{丙}} = \frac{1}{\text{乙}} + \frac{1}{\text{丁}}$ が成り立つから $\frac{1}{2} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{2r} \therefore r = \frac{2R}{R+1} \dots \textcircled{3}$ ③を②へ代入

ここで $(R+r)^2 = \left(R + \frac{2R}{R+1}\right)^2 = \left(\frac{R^2+3R}{R+1}\right)^2$, $(r+1)^2 = \left(\frac{3R+1}{R+1}\right)^2$, $(r+2-R)^2 = \left(\frac{-R^2+3R+2}{R+1}\right)^2$ より

$$\left(\frac{R^2+3R}{R+1}\right)^2(3-R)+2\left(\frac{3R+1}{R+1}\right)^2=(5-R)\left\{\left(\frac{-R^2+3R+2}{R+1}\right)^2+2(3-R)\right\}$$

$(R+1)^2$ をかけて分母を払うと

$$(R^2+3R)^2(3-R)+2(3R+1)^2=(5-R)\{-R^2+3R+2\}^2+(6-2R)(R+1)^2\}$$

$$(R^4+6R^3+9R^2)(3-R)+2(9R^2+6R+1)$$

$$=(5-R)\{R^4+9R^2+4-6R^3+12R-4R^2+(6-2R)(R^2+2R+1)\}$$

$$\text{ゆえに } 3R^4+18R^3+27R^2-R^5-6R^4-9R^3+18R^2+12R+2$$

$$=(5-R)(R^4-6R^3+5R^2+12R+4+6R^2+12R+6-2R^3-4R^2-2R)$$

$$\therefore -R^5-3R^4+9R^3+45R^2+12R+2=(5-R)(R^4-8R^3+7R^2+22R+10)$$

$$-R^5-3R^4+9R^3+45R^2+12R+2=5R^4-40R^3+35R^2+110R+50-R^5+8R^4-7R^3-22R^2-10R$$

$$\text{整理すると } 16R^4-56R^3-32R^2+88R+48=0$$

$$\therefore 2R^4-7R^3-4R^2+11R+6=0 \quad \text{これを解いて}$$

$$(R+1)\left(R-\frac{3}{2}\right)\left(R-\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)\left(R+\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)=0 \quad \text{より } R=-1, \quad R=\frac{3}{2}, \quad R=\frac{\sqrt{17}+3}{2}, \quad R=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore 2R=-2<0(\text{不適}), \quad 2R=3(\text{適}), \quad 2R=\sqrt{17}+3>\text{外径}6(\text{不適}), \quad 2R=3-\sqrt{17}<0(\text{不適})$$

従って 丙円径=3寸

※ $\frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{丙}} = \frac{1}{\text{乙}} + \frac{1}{\text{乙}}$ について

【定理】 図において4個の円 O_1, O_2, O_3, O_4 は次々外接し、
外円 O に内接, 円 O' に外接しているとき

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

ただし、円 $O_1, O_2, O_3, O_4, O, O'$ の半径を r_1, r_2, r_3, r_4, R, r とする
この式は、外円 D の半径 R と円 O' の半径 r を含まない

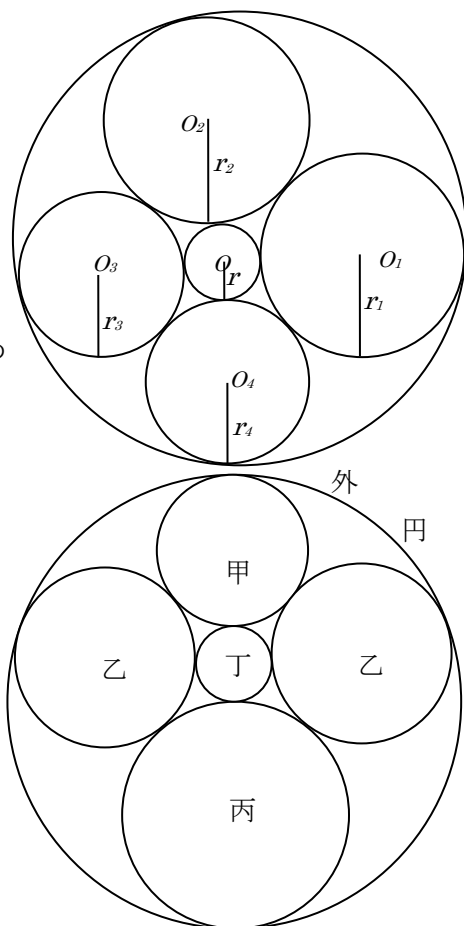
以上の定理を用いれば、上級問題の図より

$$\frac{1}{\text{甲の半径}} + \frac{1}{\text{丙の半径}} = \frac{1}{\text{乙の半径}} + \frac{1}{\text{乙の半径}}$$

あるいは

$$\frac{1}{\text{甲の直径}} + \frac{1}{\text{丙の直径}} = \frac{1}{\text{乙の直径}} + \frac{1}{\text{乙の直径}}$$

となる

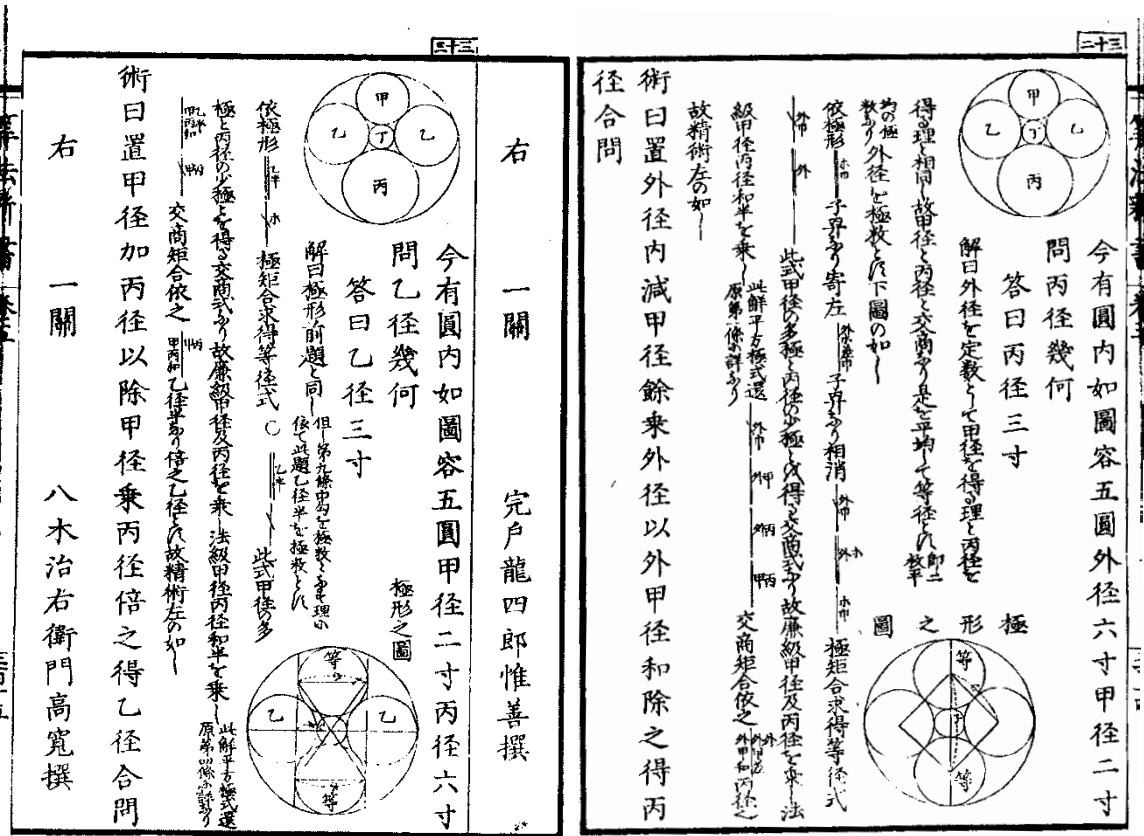


上級問題

上級問題は、一関の和算家千葉胤秀編『算法新書』（文政 13 年(1830)刊)の巻末にある附録「きょくぎようしゆつ極形術用法」の第 32 問です。この附録の部分は、千葉胤秀の門弟 53 人がそれぞれ問題を出しています。

原文は以下のように、同じ図の問題が並んでいますが、上級問題は向って右側「三十二」の一関の完戸龍四郎惟善が作った問題をもとにしました。

極形術とは、図形を極形に変形して考える方法です。極形は、1つの図形において、2つの量を a 、 b を与えて、第3の量 x が、 a 、 b について $f(x, a+b, ab)=0$ を満足するものと仮定し、 a 、 b を共に変化させて、 $a=b$ となる極限の図形のことをいいます。この2つの問題では、丁円を囲む4つの円が等円となる場合を極形と考え、この図で解法を考えています。



今有円内如図容五円外径六寸甲径二寸

問丙径幾何

答曰 丙径三寸

解曰 外径を定数として甲径を得る理と 丙径を

得る理と相同し故 甲径と丙径と交商なり 是を平均して等径とす 即二

均の極 外径を極数とす 下図の如し

数なり

依極形 等冪 子冪^① 寄左 外等差冪 子冪^② 相消 外冪 外等 等冪^③ 極矩合求得等径式

外冪 外

④

此式甲径の多極と丙径の少極とを得る 交商式なり 故廉級甲径及丙径を乗し法

級甲径丙径和半を乗し

此解平方極式還

外冪 外

外甲

外丙

甲丙

交商矩合依之^⑤

外甲差 外甲和

丙径之^⑥

故精術左の如し

術曰置外径内減甲径余乗外径以外甲径和除之得丙

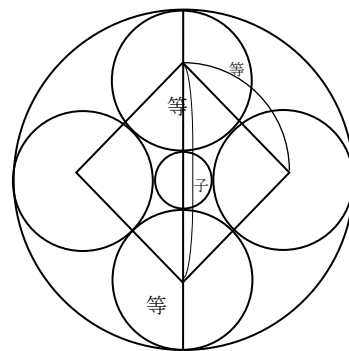
径合問

右

一関

完戸龍四郎惟善撰

極形之図



点竅術による式の表現

甲+乙 甲-乙 甲×乙 甲÷乙

甲 乙 甲乙 乙甲

用語

◎冪(べき) 同じ数を架けること。巾の字も使われる。

◎交商(こうしょう) 方程式の中の二つの量を交換しても、その方程式の形が不变で、対称になっている時の二つの数。

◎矩合(くごう) 等式を差し引き零にすること。

◎廉級(れんきゅう) 一次の項の係数がつく値

解 説

極形に依り $2 \text{ 等径}^2 = \text{子}^2$ ① $(\because \text{等} \times \sqrt{2} = \text{子})$ また $\text{外} - \text{等} = \text{子}$ より

$(\text{外} - \text{等})^2 = \text{子}^2$ ② ゆえに $(\text{外} - \text{等})^2 = 2 \text{ 等}^2$ 展開して

$$\text{外}^2 - 2 \cdot \text{外} \cdot \text{等} + \text{等}^2 = 2 \text{ 等}^2 \quad \therefore -\text{外}^2 + 2 \cdot \text{外} \cdot \text{等} + \text{等}^2 = 0 \quad \text{極矩合} \quad ③$$

ここで等径 = x とおくと $-\text{外}^2 + 2 \text{ 外} \cdot x + x^2 = 0$ ④

廉級に 甲・丙を代入、法級に $\frac{1}{2}(\text{甲} + \text{丙})$ を代入すると

$$-\text{外}^2 + 2 \text{ 外} \cdot \frac{1}{2}(\text{甲} + \text{丙}) + \text{甲} \cdot \text{丙} = 0$$

$$\therefore -\text{外}^2 + \text{外} \cdot \text{甲} + \text{外} \cdot \text{丙} + \text{甲} \cdot \text{丙} = 0 \quad \text{交商矩合} \quad ⑤$$

$$\text{これより} \quad \text{丙}(\text{外} + \text{甲}) = \text{外}^2 - \text{外} \cdot \text{甲} \quad \therefore \text{丙} = \frac{\text{外}(\text{外} - \text{甲})}{\text{外} + \text{甲}} \quad ⑥$$

$$\text{従つて} \quad \text{丙径} = \frac{6(6 - 2)}{6 + 2} = \frac{6 \times 4}{8} = 3 \quad (\text{寸})$$

$$\text{術文} \quad \frac{(\text{外} - \text{甲}) \cdot \text{外}}{\text{甲} + \text{外}} = \text{丙} \quad \text{に合う}$$