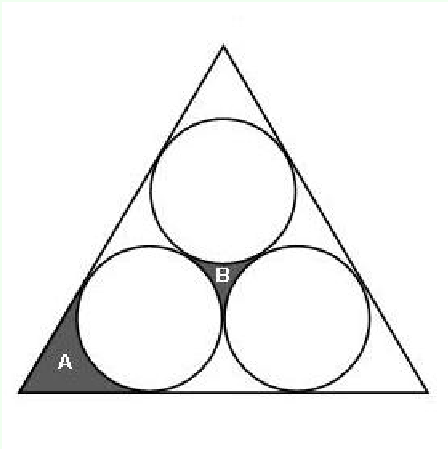
和算に挑戦 －平成 23 年度中級解答例－

中級問題（中学生以上向け）	 	**寛文３年(1663)に出版された『算俎』の問題をもとにしました。** **図のように正三角形内に等円3個が内接しています。直径が 10 ㎝のとき、黒積A、Bの面積をそれぞれ求めなさい。**

審査員講評

中級問題は複数解答の提出者を含め、中学生を中心に 770 通の応募がありました。応募数は昨年度より増加しました。比較的なじみのある図形の求積問題のため解答の糸口がみつかりやすかったことがその理由と思われます。

『算俎』の問題はＢの面積を求めるものでした。同じような問題になりましたがＡの面積を加えました。また、出題にあたっては原文の「三角」を「正三角形」、「径」を「直径」に直しました。Ａ、Ｂとも同じような答になり解答に戸惑った方がいたかもしれません。また、和算書では面積の計算の場合、円積率$\left(\frac{\pi}{4}\text{に相当}\right)$を用いています。そのため、私達の数学では必ず記載される「円周率を π とする。」の指定もあえてしませんでした。πで答を表現された方が大半でしたが、丁寧に近似値を求めた方もおりました。採点にあたっては、πの近似値をどのような値にとっても正解にしました。また、中学生を中心に答えに「㎠」がきちんと書かれていました。小学校や中学校の数学教育では、平面や空間の量の把握や認識のために単位を重要視して指導しています。その片鱗が窺え非常にうれしく思いました。

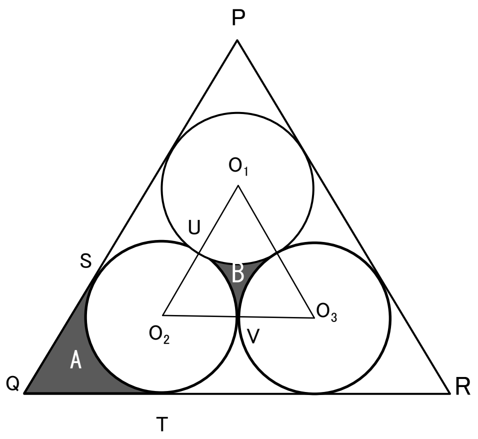
解答は三角形や四角形の面積から円の面積の一部を引くことで求められます。角度がはっきりしており円の面積公式と三平方の定理で解答できる問題のため正答率が高かったと感じました。ただ、解答者によっては非常に簡略化した答案もありました。答案は同じような立場の人が読んでわかりやすい内容、あるいは解答者が教える立場で作成して欲しいものです。

誤答は直径を半径や正三角形の 1 辺と読み違えた方、引く面積の誤り、単なる計算間違いによるものでした。

数人の方が複数の解答を寄せられましたが、中には積分を使用した解答もありました。また、解答の一部である三角形の求積では、「ヘロンの公式」を使用した方もいらっしゃいました。また、「正三角形内に等円が$\frac{n(n+1)}{2}$個が内接（1 つの辺に接する円の個数がｎ個）し、直径が 2ｒの場合にＡ、Ｂの面積を求める。」と一般化し、ｎが 2 の場合で求める方法をとった方もいらっしゃいました。今回の問題に関してはこのように一般化してから中学生にも解答可能な範囲で出題を考えればよかったと思います。

それぞれ考えられる限りの様々な解答を楽しく採点させていただきました。

解答例



図のように正三角形PQR、3つの等円の中心を各々O_1, O_2, O_3とする。
また、等円O_2から2辺QR，PQに下した垂線をO_2T, O_2Sとする。

Aの面積

$\angle PQR = 60°$なので　　$\angle SO_2T = 120°$

また$\angle O_2QT = 30°$　なので$QT = 5\sqrt{3}$

よって、円周率をπとすると

$$
\begin{aligned}
\text{黒積}A &= \text{四角形}O_2SQT - \text{扇形}O_2ST \\
&= 2 \times \Delta O_2QT - \text{扇形}O_2ST \\
&= 2 \times \frac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 5 - 5^2\pi \times \frac{1}{3} \\
&= 25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi \\
&= 25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

(答)　$25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$　cm^2

Bの面積

$\Delta O_1O_2O_3$は、正三角形である。

円O_1とO_2，円O_2とO_3の接点を各々U, Vとする。

$$
\begin{aligned}
\text{黒積}B &= \Delta O_1O_2O_3 - 3 \times \text{扇形}O_2UV \\
&= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} - 3 \times 5^2\pi \times \frac{1}{6} \\
&= 25\sqrt{3} - \frac{25}{2}\pi \\
&= 25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

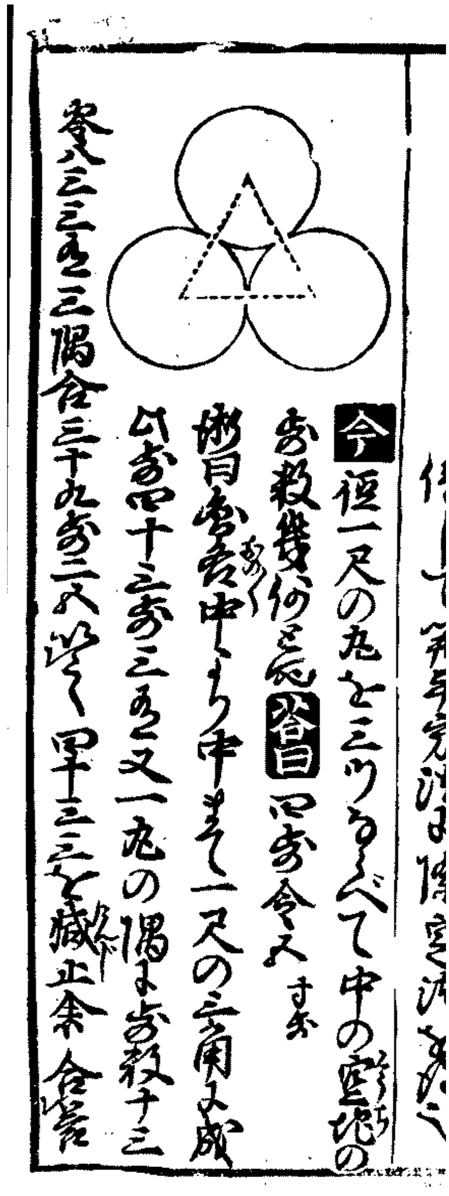
(答)　$25\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$　cm^2

中級問題

中級問題は、寛文３年(1663)に出版された『算俎』の問題をもとにしました。
著者の村松茂清は、慶長 13 年（1608）に生まれ。元禄 8 年（1695）に没した常陸国(茨城県)那珂郡村松村の出身の江戸前期の和算家です。播磨国(兵庫県)赤穂の浅野家に仕え、江戸に住んでいました。

『算俎』は、日本で始めて円周率の正しい値を載せていることで有名です。円に内接する正 32768 角形の周の長さを計算して、円周率を 3. 1415926 と小数点以下 7 桁まで正しい値を示しています。

中級問題の原文は、中央の面積を求めるものでしたが、以下のようになっています。



今 径一尺の丸を三ツならべて中の空地(くうち)の歩数幾何と問　答曰　四歩令五寸歩

術曰円各々(おのおの)中より中まで一尺の三角に成此歩四十三歩三有　又一丸の偶に歩数十三零八三三有三偶合三十九歩二五以て四十三三を減(げんじ)止余合レ答

現代訳

問題　　今、直径 1 尺の丸(円)を 3 つ並べて、中の空地の歩数(面積)はいくらか。

答え　4 歩 05 寸歩(4.05 歩 ^{2})

術　　各々の円の中心を結んで一辺が 1 尺の正三角形を作る。この面積は、43.3・・歩 ^{2}。
また丸の隅に面積 130833・・・(扇形)があるので、3 個合わせて 39.25 を 433 から引いて残りが答えに合う。

術文を現代風の式にすれば、

1尺の正三角形の面積は、$1\times\frac{1}{2}\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=0.433\cdots$　($\sqrt{3}$を1.732で計算)

扇形の面積は　$1^2\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{6}=0.130833\cdots$

(和算では、円の面積は直径の2乗に円積率$\frac{\pi}{4}$をかけます。
ここでは、円周率を3.139992程度で計算しているようです。)

$0.130833\cdots\times 3 \fallingdotseq 0.392499\cdots \fallingdotseq 0.3925$

$0.433-0.3925=0.0405$

4歩05寸歩

となります。