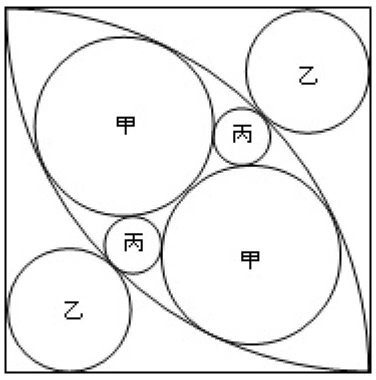
和算に挑戦 ―平成 24 年度上級解答例―

上級問題（高校生以上向け）	 稲子沢雨宝堂(大船渡市)に文政 10 年(1827)に奉納された算額をもとにしました。 **正方形内に 2 つの四分円があります。図のように甲円 2 個、丙円 2 個、正方形と四分円に接する 2 個の乙円があります。丙円の直径が 1 寸のとき、乙円の直径を求めなさい。**

審査員講評

上級問題には、160 通の応募がありました。応募者数は 156 人で、年齢別では 10 代が 30 人、20 代 4 人、30 代 11 人、40 代 27 人、50 代 35 人、60 代 26 人、70 代 15 人、80 代 8 人でした。特徴として 20 代、30 代の応募者が少なく、70 代、80 代の応募者が例年に比較し多いという状況でした。

正答率は、76.9%であり、過去 10 回の正答率と比較し 3 番目に高い正答率でありました。三平方の定理のみで解ける問題なので、途中のやや複雑な計算を根気よく進めれば取り組みやすい問題であったと思います。

誤答となった例としては、「甲円の半径と正方形の 1 辺の長さ」の関係式、「乙円の半径と正方形の 1 辺の長さ」の関係式のいずれかを導き出せなかった答案が多々見られました。

正答例としては、次の方法で解いたものが殆どでありました。

① 二つの直角三角形に三平方の定理を適用。

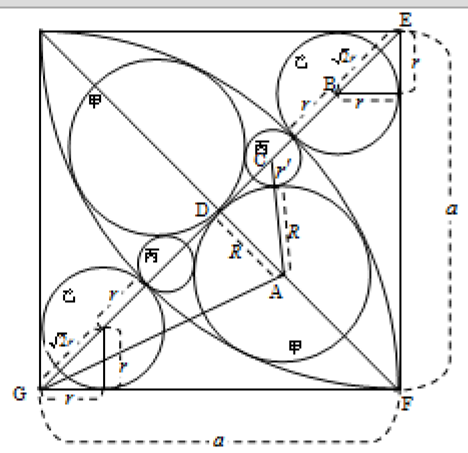
② 方べきの定理を適用。(甲円及び乙円において、接線長の平方=長割線の長さ×短割線の長さ)

③ 座標を利用した解法。

解答集に掲載する解答例や各賞の選定には、いずれの答案も甲乙付け難く審査員一同悩みましたが、解法が簡潔かつ明快に展開されているものを選定させていただきました。

皆様方の熱気を、寄せられた答案に感じながら審査をさせていただきました。私たちは、より良い問題を提供し皆様とともに勉強すべく更に努力して参りますので、今後もよろしくお願いいたします。

解答例



甲円の半径をR 、乙円の半径をr 、丙円の半径をr' 、
正方形の1辺の長さを a とする。
図において

$$CD = a - \frac{\sqrt{2}}{2}a - r' \qquad 2r' = 1$$

$$DE = \frac{\sqrt{2}}{2}a = DC + CE$$ であるから

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = a - \frac{\sqrt{2}}{2}a - r' + r' + \left(\sqrt{2}+1\right)r \quad \cdots \quad ①$$

$$\therefore \left(\sqrt{2}-1\right)a = \left(\sqrt{2}+1\right)r \quad \cdots \quad ②$$

次に$\triangle ADG$において

$AD^2 + \mathrm{GD}^2 = AG^2$ より(三平方の定理)

$$\mathrm{R}^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = (a-R)^2$$

$$R^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 - 2aR + R^2 \qquad \therefore \frac{1}{2}a^2 = 2aR \qquad 2R = \frac{1}{2}a \quad \cdots \quad ③$$

また $\triangle ACD$において $AD^2 + DC^2 = AC^2$ であるから (三平方の定理)

$$\mathrm{R}^2 + \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}a - r'\right)^2 = (R + r')^2$$

$$R^2 + \frac{6-4\sqrt{2}}{4}a^2 - \left(2-\sqrt{2}\right)ar' + r'^2 = R^2 + 2Rr' + r'^2$$

$$2Rr' = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a^2 - \left(2-\sqrt{2}\right)ar' \quad \cdots \quad ④$$

③と④より

$$\frac{1}{2}ar' = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a^2 - \left(2-\sqrt{2}\right)ar' \times 4$$

$$a \cdot 2r' = \left(6-4\sqrt{2}\right)a^2 - \left(4-2\sqrt{2}\right)a \cdot 2r'$$

$$\left(6-4\sqrt{2}\right)a = \left(5-2\sqrt{2}\right) \cdot 2r' \qquad \therefore a = \frac{5-2\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}} \cdot 2r'$$

これを②に代入して

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{5-2\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}} \cdot 2r' = \left(\sqrt{2}+1\right)r$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)\left(5-2\sqrt{2}\right) \cdot 2r' = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) \cdot 2r$$

$$\therefore 2r = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(5-2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)} \cdot 2r' = \frac{5\sqrt{2}-5-4+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3-4-2\sqrt{2}} \cdot 2r' = \frac{7\sqrt{2}-9}{\sqrt{2}-1} \cdot 2r'$$

$$= \frac{\left(7\sqrt{2}-9\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} \cdot 2r' = \left(14+7\sqrt{2}-9\sqrt{2}-9\right) \cdot 2r'$$

$$= \left(5-2\sqrt{2}\right) \cdot 2r' = \left(5-\sqrt{8}\right) \cdot 2r' = 5-\sqrt{8} \quad \cdots (\text{答})$$

答　　乙円径2寸1分7厘1毛5有寄

解説

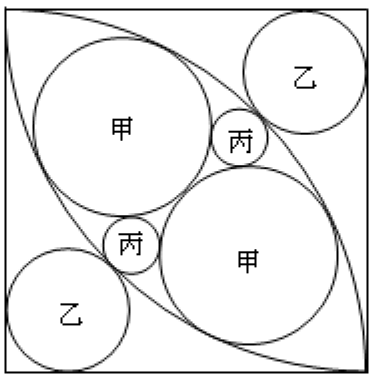
上級問題

稲子沢雨宝堂(岩手県大船渡市)に文政 10 年(1827)に奉納された算額をもとにしました。

この算額は、明治 45 年に岩谷堂(岩手県奥州市)の小原家に、百体の観音像などとともに譲渡されました。赤煉瓦造りの蔵に大切に安置されたので、小原家の屋号「中善」をとって中善観音の通称で信仰されていました。現在は、えさし郷土文化館で公開されています。

算額の最初に「流峯先生閲　真山新次員方門葉謹題」とあるので、一関の和算家千葉胤秀の指導を受けて、真山新次の門人が奉納したものということになります。2 面が一組となっており、それぞれに 12 題が書かれています。千葉胤秀は、文政 2 年から 5 年頃、大船渡や大槌など三陸沿岸方面部に行って和算を教えているので、その成果が形になったものと思われます。なお、文政 13 年に千葉胤秀の編集によって出版された『算法新書』の巻末に、真山新次が作った問題が掲載されています。

上級問題は、千葉喜蔵によるもので以下のとおりです。



今有方内如図設重円乃重円径者方面二段等容甲乙

丙円各二個只云丙円径一寸問乙円径幾何

答曰　乙円径二寸一分七厘一毛有奇

千葉喜蔵行胤

術曰置八個開平方以減五個余乗丙円径得

乙円径合問

現代訳

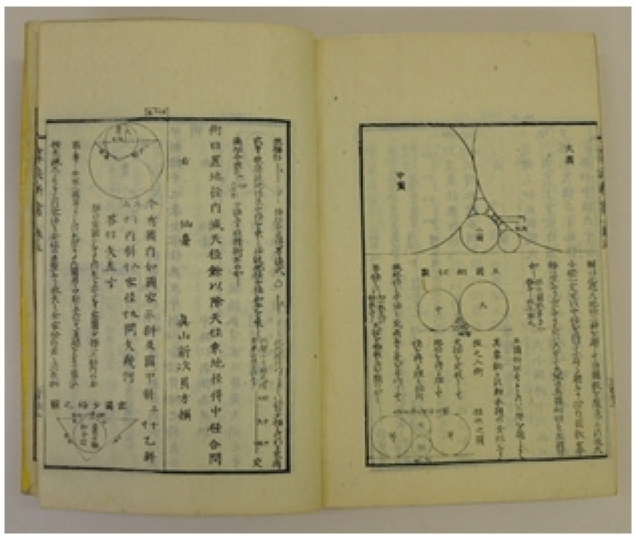
問題　今正方形の中に、図のように重円(直径は正方形の１辺の２倍)、甲、乙、丙各２個をいれる。丙円の直径が１寸の時、乙円の直径はいくらか。

答え　乙円の直径は2寸１分７厘１毛・・・

術(解き方)　８を平方に開き、５から引いた残りに丙円径をかけると乙円径を得る。

術では、$5-\sqrt{8}$でこの場合は答えが出るとしており、現代の解答ともあっています。

ただ、どのようにしてこの式にいたったかは、算額からは知ることはできません。



稲子沢神璧と千葉胤秀のノート

和算家は算額のことを神璧ともいいました。「稲子沢神璧」には、46 題の問題が書かれ、現存する算額 2 面分の問題も含まれています。稲子沢雨風堂には、他に 2 面算額があったものと考えられます。

千葉胤秀が文政 4、5年に大船渡周辺を巡った時に、和算の問題を記録したノートも残っています。

算法新書　文政 13 年（1830）刊　長谷川寛閲　千葉胤秀編

『算法新書』の巻末には、千葉胤秀の門人 53 人の作った問題が掲載されています。稲子沢雨宝堂に算額を奉納させた真山新次の問題は、天円の直径 2 寸、地円の直径 3 寸の時、中円の直径を求めるもので、極形という方法を用いて、6寸と答えを出しています。