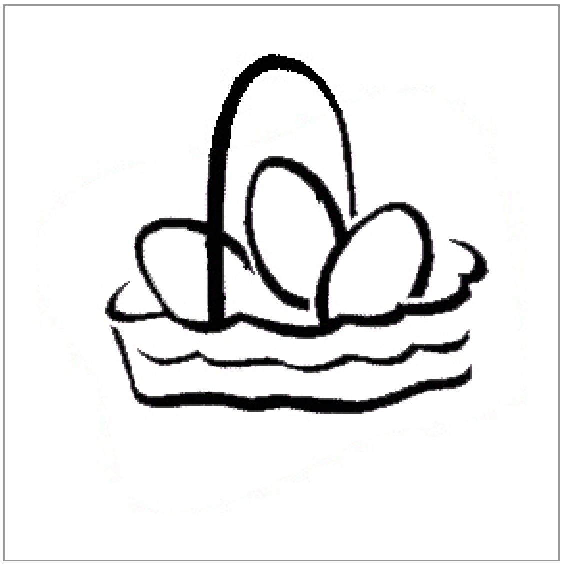
平成25年度出題問題［初級問題］

娘（むすめ）が卵（たまご）を籠（かご）に入れて歩いていました。そこへ武士（ぶし）がぶつかって卵が割れてしまいました。武士は、弁償（べんしょう）しようと、娘に何個入っていたか聞きました。娘は、何個かは覚えてないが、3個ずつとりだしたら2個余り、5個ずつとりだしたら3個余り、7個ずつとりだしたら2個余ったと答えました。娘が持っていたと思われる卵の数で、もっとも小さい数を求めなさい。

※寛永18年（1641）に出版された『塵劫記』の問題をもとにしました。



○審査員講評

解答のためには、題意の理解が必要です。初級問題では、漢字にひらがなの読みがつきました。低年齢者には一助になったことと思います。そのためか小学１年生から 90 歳の方まで広く応募いただきました。特に小学生の応募が多く、それは楽しい出会いでした。

応募はかけ算の九九を学んだ小学３年生以上の方と考えていましたが、初歩の足し算と引き算しか学習していない１年生からの応募があり、まさしく和算博士!と審査員一同感激しました。

解法は年齢に応じた内容になりました。採点につきましては、解答としてきちんと表現された内容を正解として採点いたしました。ただきちんと解けている、自分はわかっているのに表現が稚拙な残念な解答がありました。低学年の生徒さん、答案は友達に易しく教えるつもりで書きましょう。

以下、簡単に解法を略記します。

① 小学校１年生は○を並べ、題意にしたがい区切り２３に到達する解法。

② かけ算を習った小学生は、３×７＋２＝２３、２３は５で割って余りが３なので条件を満たす、と確認する解法。

③ ３，５，７の数字の倍数と余りの数で数を一般的に表現して、方程式から共通な数を見つける高校生の内容の解法。

④ 求める数を文字で表現して１次関数から決める、「３，５，７が互いに素」であることを利用して決定する方法。

⑤ 連立１次合同式を使用する解法。この種の解答は全員が非常に丁寧で優れていて、敬服いたしました。

出題者が予想しなかった①の解答以外はほぼ予想通りの様々な解法が寄せられました。

採点にあたり、大げさな言い方ですが、たくさんの方のご尽力により日本の数学教育は様々な課題はあるにしても過去現在ときちんとなされていると実感しました。

なお、「２３個なら娘が籠で持てるが、次の答の１２８個は持てない」という感想が寄せられました。今回は初級問題なので答が２３個になる問題にしました。数学の問題であっても非現実な数値は避けるべきとの指摘と肝に銘じます。

次回も幅広い年齢の方々に投稿しただける問題を心がけます。ご参加を心からお待ち申し上げます。

○解答例

解答１

３で割って２あまる数は

５，８，１１．１４，１７，２０，２３，２６，２９，３２，３５，３８,・・・・・

５で割って３あまる数は

８，１３，１８，２３，２８，３３，３８，４３，４８，５３，５８,・・・・・・・

７で割って２あまる数は

９，１６，２３，３０，３７，４４，５１，５８，６５，７２，７９,・・・・・・・

共通な最小の数は　　２３

答　２３個

解答２

最小の卵の数をＮとする。このとき、題意により

Ｎ＝３ａ＋２　　・・・・・・・・・①

Ｎ＝５ｂ＋３　　・・・・・・・・・②

Ｎ＝７ｃ＋２　　・・・・・・・・・②

①＝②＝③　　より

３ａ＋２＝５ｂ＋３＝７ｃ＋２

よって　　３ａ－５ｂ＝１　　－５ｂ＋７ｃ＝１　この２式を辺々相減じて

３ａ－７ｃ＝０　　∴　　３ａ＝７ｃ　　３と７は互いに素

∴　ａは７の倍数である。　ａ＝７ｋ（ｋは自然数）

とおく。このとき　　ｂ＝$\frac{1}{5}$（２１ｋ－１）、ｃ＝３ｋ

ｋ＝１　のとき　ａ＝７　　∴　Ｎ＝３×７＋２＝２３

ｋ＝１のとき、ｂ＝４，ｃ＝３　だがこのときも　　Ｎ＝２３

∴　Ｎ＝２３

答　２３個

解答３

連立１次合同式の公式を使用した解法。大学などで、代数を学んだ方はご存じと思います。

これについては、『聖なる数学：算額』　深川英俊　トニー・ロスマン　共著

Ｐ.３８に解答がありますので説明しながら紹介いたします。

孫子算径の解答

３で割っときの余り２に７０を乗じ　　２×７０＝１４０

５で割ったときの余り３に２１を乗じ　３×２１＝６３

７で割ったときの余り２に１５を乗じ　２×１５＝３０

１４０＋６３＋３０＝２３３

２３３－２×（３×５×７）＝２３３－２×１０５＝２３

さて、孫子はなぜこのような解答を思いついたか考える。

一般に、３で割った余りが１のとき、７０＝３×２３＋１

５で割った余りが１のとき、２１＝５×４＋１

７で割った余りが１のとき、１５＝７×２＋１　　　とおきます。

いま、余りは３で割ったときが２，５で割ったときが３，７でわったときが２なので

２×７０＋３×２１＋２×１５－１０５－１０５＝２３

孫子はたくさんの問題を解いて経験的にこの解答に到達したと思われます。

それを現代的に解説します。

求める数をＮとします。

３で割ることは３を次々に引くことを意味します。この場合は余りが２になるまで引くことを意味します。これを、「Ｎを３で割った余りは２である」と言います。

これを、大学生は代数学を学ぶと「Ｎ≡２（ｍｏｄ３)」と書き「Ｎは３を法として２に合同である」と読みます。ｘ≡ｒ（ｍｏｄｋ）はｋを何倍かしてｒを加えればｘとなることを意味します。この問題の場合

Ｎ≡２（ｍｏｄ３）

Ｎ≡３（ｍｏｄ５）

Ｎ＝２（ｍｏｄ７）

３個の合同式で表されたＮに関する連立方程式を解くことになります。Ｎは不定ですが、最小のＮを求めます。

孫子算径では、２×７０＝１４０≡２（ｍｏｄ３）と記載されています。

同様に１４０＋６３≡２（ｍｏｄ３）　　　これは、６３は３の倍数なので１４０に６３を加えても３で割った余りには関係しないことを示しています。同じ理由で

１４０＋６３＋３０≡２（ｍｏｄ３）　　　ここで、１４０も３０も５の倍数なので

６３≡３（ｍｏｄ５）　　　から１４０＋６３＋３０≡３（ｍｏｄ５）さらに

３０＝２（ｍｏｄ７）　　　から１４０＋６３＋３０≡２（ｍｏｄ７）

∴　　Ｎ＝１４０＋６３＋３０＝２３３は条件を満たす。

しかし、このＮは最小ではない。３，５，７の最小公倍数は１０５なので

２３３－１０５＝１２８　　　　１２８－１０５＝２３

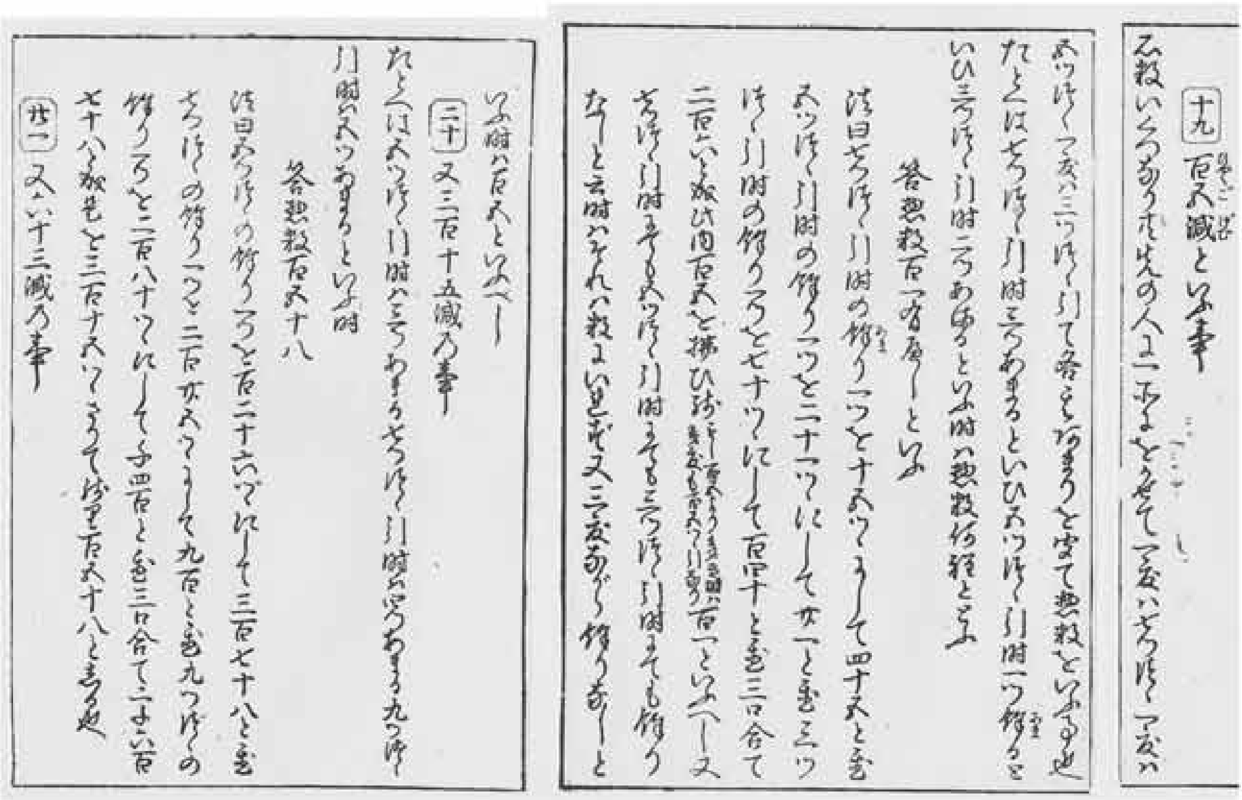
応募者の解答もこの種はほぼ上記の内容でした。この解答を寄せられた方々は小さな数値が物足りなかったかもしれません。

この問題は『塵劫記』の１６３１年度版に採用されたが、最小公倍数１０５を引くので「百五減問題」となづけられ、様々楽しまれてきました。

初級問題

初級問題は、中国の数学書『孫子算経』にあり、日本でも『塵劫記』をはじめ多くの和算書に取り上げられて、西洋数学にも類似問題の多い、「百五減算」をもとに作った問題です。百五減算は、答えを出すときに7と5と3の最小公倍数105を引けるだけ引くことに由来します。

ここでは、寛保3年(1743)に、京都の和算家中根彦循によって発行された『勘者御伽双紙』の百五減算の問題を紹介します。なお『勘者御伽双紙』には、六十三減算、三百十五減算も紹介されています。



十九　百五減といふ事

石数いくつなり共、先の人に一所にをかせて一度ハ七ツつゝ、一度ハ五ツつゝ、一度ハ三ツつゝ引て、各其あまりを聞て、総数をいふ事也

たとへは七ツつゝ引時三ツあまるといひ、五ツつゝ引時一ツ余るといひ、三ツつゝ引時二ツあまるといふ時ハ、総数何程ととふ

答　惣和百一有へしといふ

法曰、七ツつゝ引時の余り一ツを十五ツゝにして四十五と置く

五ツつゝ引時の余り一ツを二十一ツゝにして廿一と置、三ツつゝ引く時の余り一ツを七十ツゝにして百四十と置、三口合て二百六と成、此内百五を払い残、もし百五より多き時ハ幾度も百五ツゝ引なり、百一といふへし、又七ツつゝ引時にても五ツつゝ引時にても三ツつゝ引時にても余りなしと云時ハそれハ数にいれず、又三度ながら余りなしといふ時ハ百五といふべし

（現代語訳）

十九　百五減算という事

石を何個でも誰かに一ケ所に置かせて、一度は 7 つずつ、一度は 5 つずつ、一度は 3 つずつ引き、それぞれの余りの数を聞いて、石の総数を答えることをいう。（百五減算という）

たとえば、7 つずつ引くと 3 つ余り、5 つずつ引くと 1 つ余り、3 つずつ引くと 2 つ余ると云われたとき、石の総数はいくつか。

答え　総数　101

解き方　7 つずつ引く時の余り 1 つを 15 ずつにして 45 と置く

5 つずつ引く時の余り 1 つを 21 ずつにして 21 と置く

3 つずつ引く時の余り 1 つを 70 ずつにして 140 と置く

これら 3 つの数を合せて 206 となる

この 206 から 105 を引き、残り 101 が答えである。

（もし残りが 105 より多い時には繰り返し 105 を引けるだけ引く）

また、7 つずつ引いても、5 つずつ引いても、3 つずつ引いても余りがないという時はそれは数にいれず、3 つとも余りがない時には 105 と答える。

解説

「7 つずつ引く時の余り 1 つを 15 ずつにして 45 と置く」とは、余り 1 つ分を 15 とする、つまり余りを 15 倍するということなので、現代の式で表せば　$3\times15=45$　となります。

同様に、$1\times21=21$、$2\times70=140$

これらを合計して 105 を引く　　$(45+21+140)-105=206-105=101$

初級問題とは余りの数が異なります。

石の総数をN個とすると、7ずつ、5ずつ、3ずつ引いた時、それぞれx回、y回、z回ひくことができ、余りが3個、1個、2個だったとすると次の式が成り立ちます。

$N=7x+3$・・・①

$N=5y+1$・・・②

$N=3z+2$・・・③

7、5、3の最小公倍数が105であることに注目して、x、y、zの係数が105の倍数になるように、

①の両辺に15をかけて　　$15N=105x+45$

②の両辺に21をかけて　　$21N=105y+21$

③の両辺に70をかけて　　$70N=210x+140$

3つの式の辺々を加えると

$$106N=105(x+y+2z)+206$$

$$N=105(x+y+2z-N)+206$$

$$N=206-105(N-x-y-2z)$$

$(N-x-y-2z)$ は整数だから、$15a+21b+70c$ から105の倍数を引けるだけひくと総数Nを求めることができることになります。

『勘者御伽双紙』の六十三減算、三百十五減算を、問題と答えのみ現代訳で紹介します。

○三百十五減のこと

たとえば5ずつ引く時は3余り、7ずつ引く時は4余り、9ずつ引く時は5余るという時、総数はいくらか

答え　158

○六十三減の事

たとえば7ずつ引く時は3余り、9ずつ引く時は5余るという時、総数はいくらか

答え　59