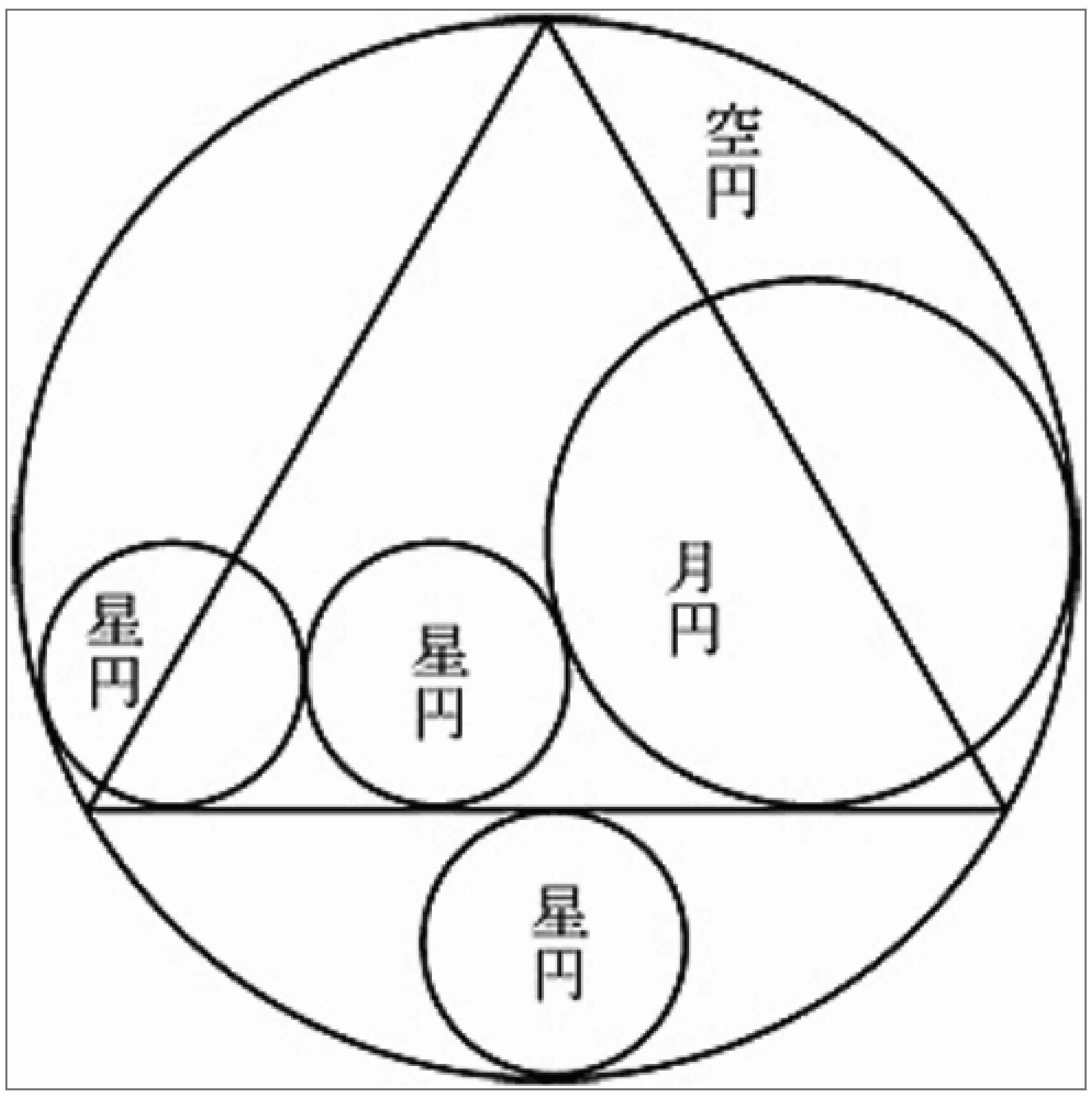
平成25年度出題問題［上級問題］

円内に正三角形が内接し，図のように直径１寸の星円３個と月円が接しています。月円の直径を求めなさい。

※根城八幡宮（大船渡市）に天保12年（1841）に奉納された算額をもとにしました。



○審査員講評

上級問題には、昨年より 100 件程多い 259 件の応募がありました。応募者数は 248 人で、年齢別では 10 代が 119 人、20 代 4 人、30 代 9 人、40 代 22 人、50 代 31 人、60 代 30 人、70 代 20 人、80 代 12 人、不明 1 人でした。特徴として 20 代、30 代の応募者が少なく、中学生からの応募者が例年に比較し多いという状況でした。

正答率は、50.4%であり、過去 11 回の正答率と比較し 2 番目に低い正答率でありました。三平方の定理のみで解ける問題なのですが、最初の設定に思い込みを持ちこむと論理がおかしくなる問題であったためかと思います。結果の数値が合っていても論理の展開が正しくない答案は不正解としました。応募者数が多かったのに正答率が低かったのは、この思い込みの迷路に入り込んでしまった答案が多かったことによると思います。

正答例としては、次の方法で解いたものが殆どでありました。

① 月円の中心から空円の直径に垂線を下ろし、その足と空円の中心及び月円の中心からなる直角三角形に三平方の定理を適用。

② 座標を利用した解法。

③ 図形の対象移動または回転移動を利用した解法。

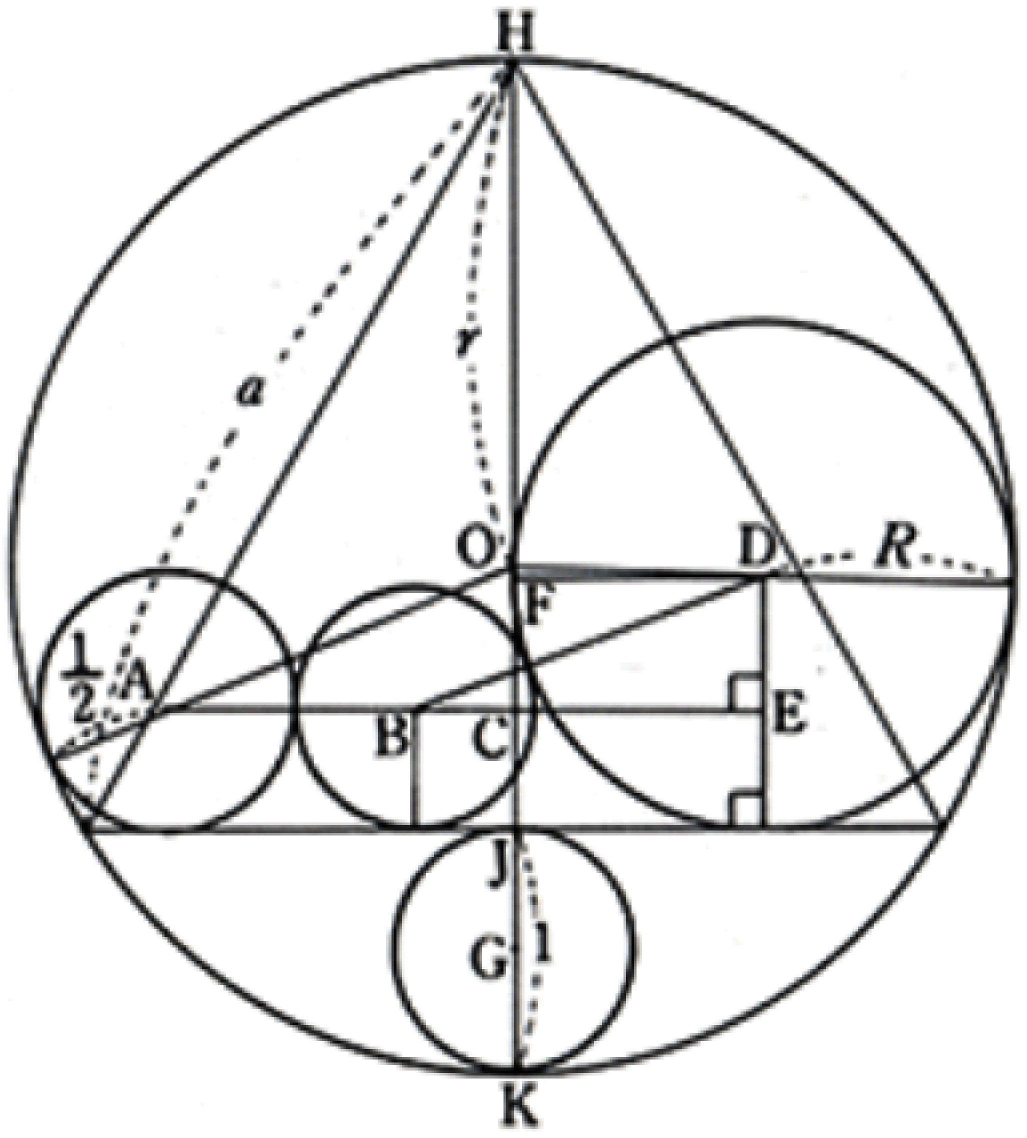
誤答となった例としては、「最初から空円の直径が月円に接するとして進めたもの」が、かなりの数を占めていました。月円が空円の直径に接していることが証明無しに判断できるのであれば、空円の直径（もしくは半径）の長さを求めるだけで問題は解決します。しかし、問題の図からは直接この判断は得られず、この判断が正しいかどうかを論理的に示す必要があります。この問題はこのことを問うている問題でありました。

解答集に掲載する解答例や各賞の選定には、いずれの答案も甲乙付け難く審査員一同悩みましたが、今回も解法ができるだけ簡潔かつ明快に展開されているものを選定させていただきました。

次のような感想もいただきました。「学校の数学では、みんなで同じ問題を解いても、感想を発表する事はなかったし、なにより答えを出すことが重要で、楽しいと感じている間もなかったような気がします。今、この年になって、和算を楽しく思っている自分が不思議です。」「この一ヶ月、寝ても覚めても仕事中も、ふとした瞬間に和算の事を考えるのは、非常に幸せなことでした。」我々にとっては大変励みになる言葉でありました。皆様方の熱気を、寄せられた答案に感じながら審査をさせていただきました。私たちは、より良い問題を提供し皆様とともに勉強すべく更に努力して参りますので、今後もよろしくお願いいたします。

○解答例

正三角形の一辺をa，円O（空円）の半径をr，求める円D（月円）の半径をRとすると，図から分るように



$$\frac{\sqrt{3}}{2}a+1=2r \cdots\cdots ①$$

が成立つ

また　$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}r$

$(\because \mathrm{HJ}=r+\frac{1}{2}r)$

$\therefore a=\sqrt{3}r \cdots\cdots ②$

②を①へ代入して　$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}r+1=2r$

従って　$\frac{1}{2}r=1$　　$\therefore r=2 \cdots\cdots ③$

$\mathrm{OA}=r-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$\mathrm{OC}=r-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$　より

$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OC}^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$

$\therefore \mathrm{BC}=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}=\sqrt{2}-1\ (\because \mathrm{AB}=1)$

また，△BDEにおいて　$\mathrm{BE}=\sqrt{\mathrm{BD}^2-\mathrm{DE}^2}$

$=\sqrt{\left(R+\frac{1}{2}\right)^2-\left(R-\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{2R}$

$\therefore \mathrm{CE}=\mathrm{BE}-\mathrm{BC}=\sqrt{2R}-\sqrt{2}+1=\sqrt{2}(\sqrt{R}-1)+1$

更に，△ODFにおいて　$\mathrm{OD}^2=\mathrm{OF}^2+\mathrm{FD}^2$　であるから

$(r-R)^2=(\frac{1}{2}r-R)^2+\mathrm{CE}^2$

$\therefore (2-R)^2=(1-R)^2+\{\sqrt{2}(\sqrt{R}-1)+1\}^2$

$\therefore 4-4R+R^2=1-2R+R^2+2(\sqrt{R}-1)^2$

$+2\sqrt{2}(\sqrt{R}-1)+1$

$2-2R=2R-4\sqrt{R}+2+2\sqrt{2}\sqrt{R}-2\sqrt{2}$

$\therefore 2R-(2-\sqrt{2})\sqrt{R}-\sqrt{2}=0$

$(\sqrt{R}-1)(2\sqrt{R}+\sqrt{2})=0$

ここで$2\sqrt{R}+2\neq 0$より　$\sqrt{R}-1=0$　　$\therefore R=1$

従って，$2R=2$　　　答　月円の直径は2寸

○考察

$r_1 = 1$(月円の半径)

$O_1G = EF$

$= \sqrt{2r_1} - \left(\sqrt{2} - 1\right)$　　であれば

$\left(O_2F - O_2E\right)$

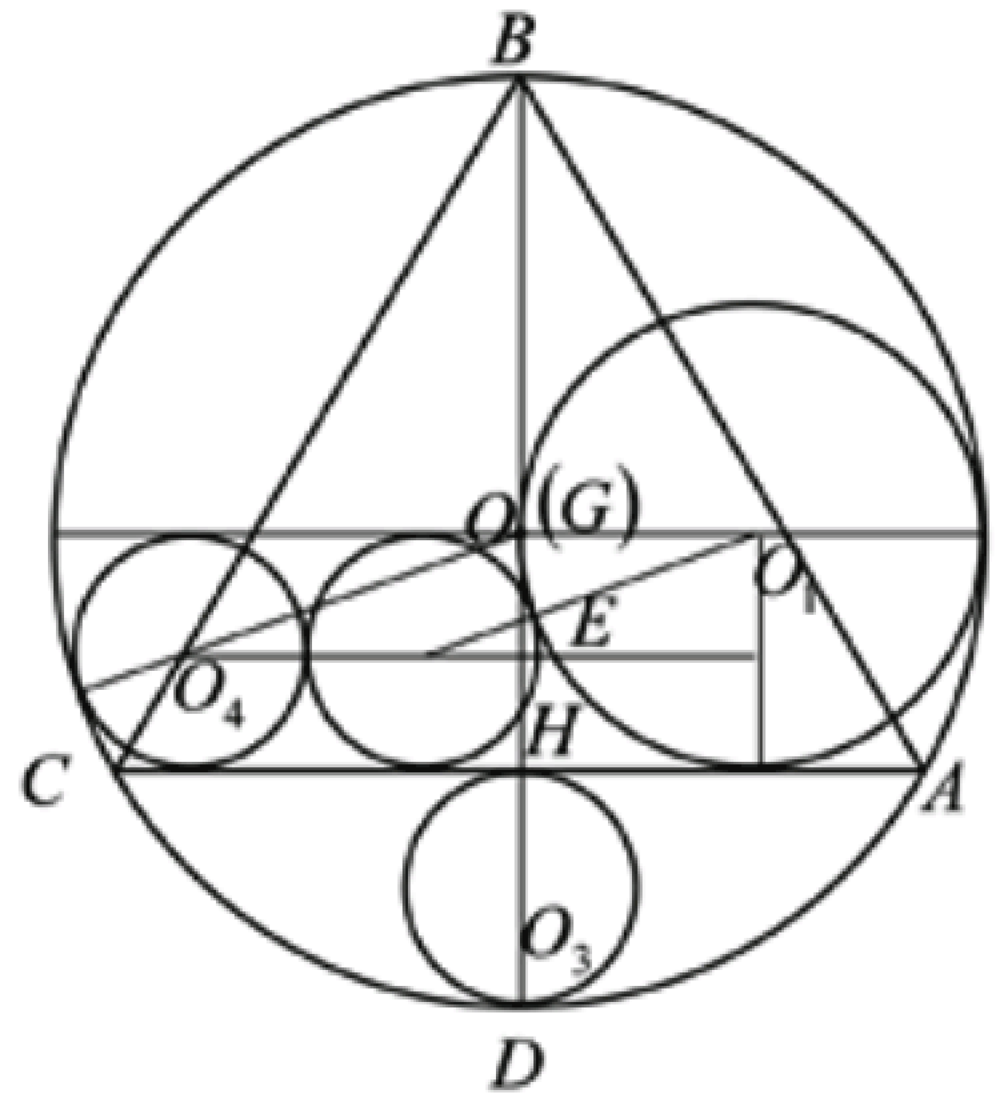
$O_1G = \sqrt{2 \times 1} - \left(\sqrt{2} - 1\right)$

$= 1$　　となり

$OO_1 = 2 - r_1 = 2 - r_1 = 1$　　となり,点G, Oは一致する。

つまり点$G(O)$は,直線BDと月円の接点となる

このとき　図は次の様になっている



月円が直線BDに接していることが洞察で最初から判断できれば円Oの直径（もしくは半径）を求めるだけで、問題は簡単に解決することになる。

提示された図から、直接この判断はかなり微妙である。

和算の特徴として、図を曲解しないで対応することが肝要であろう。

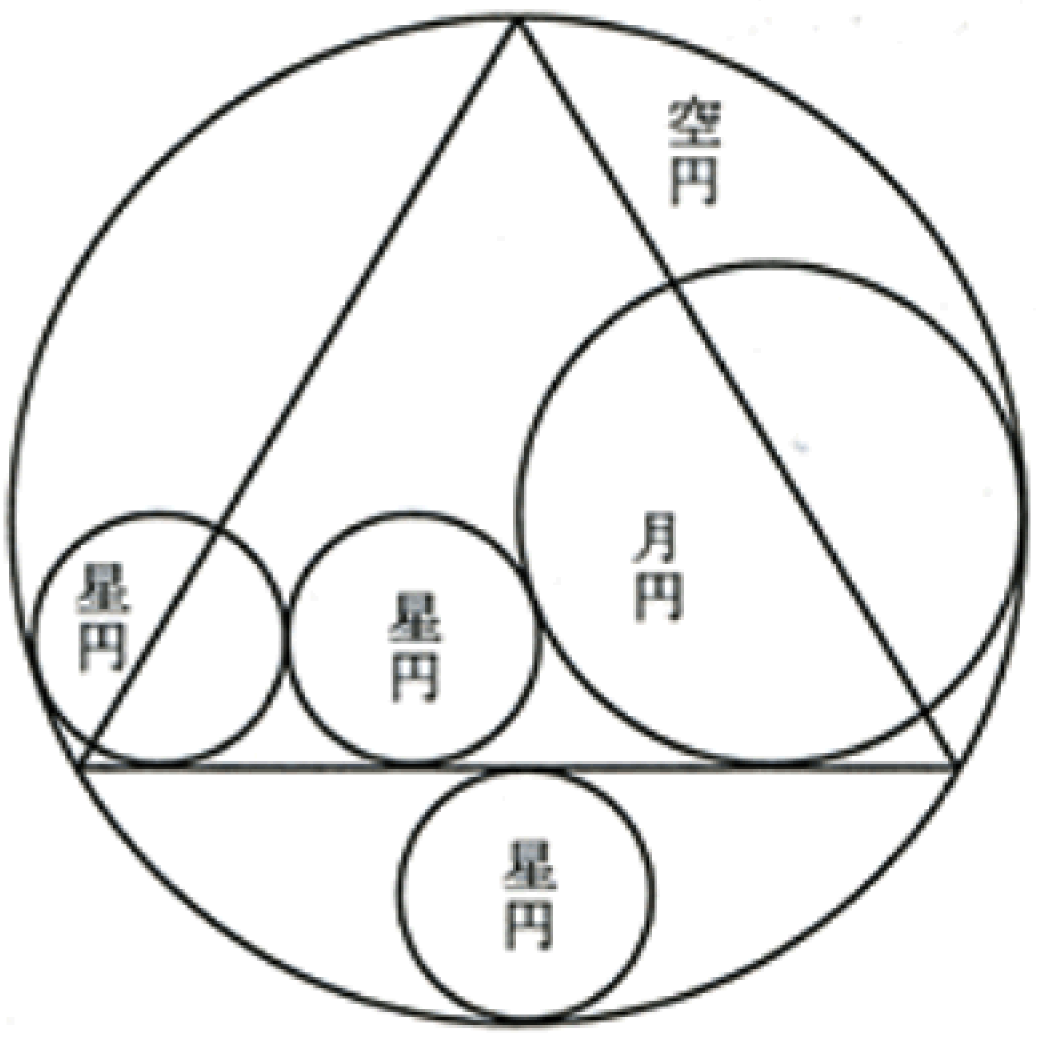
ちなみに円O_2, O_3, O_4(星円)も上図のようになっている。

上級問題

岩手県大船渡市の根城八幡宮に、天保 12 年(1841)8 月に千葉胤道の門人 21 名が奉納した算額の問題です。根城八幡宮には 2 枚の算額があり、いずれも縦 60 cm、横 182 cmほどのものです。一方の算額は、上 3 分の 1 が欠損し奉納年月日がありませんが、2 面の算額は対と考えられます。

この問題は 11 問掲載されている算額のうち 3 番目にあり、佐野喜蔵則明の提出したものです。算額の最初に「奉納　関流七伝　千葉胤道門人」とあります。千葉胤道は一関の和算家千葉胤秀の息子で、胤秀の跡を継いだ関流 8 伝の和算家です。千葉胤道は、一関から太平洋沿岸部まで出張して和算を教えています。

算額には次のように描かれています。



今有空円内如図設三角容月円及星円三個其星
円径一寸問月円径幾何
答曰月円径二寸
佐野喜蔵則明
術曰置星円径倍之得月円径合問

現代訳

問題　今空円の中に、図のように三角と月円、星円３個を入れる、星円径（直径）が１寸のとき月円径(直径)はいくらか。

答え　月円の直径は２寸

術(解き方)　星円径を倍にすると月円径を得る。

術文の式は、現代の解答ともあっています。しかし、どのようにしてこの式にいたったかは、算額からは知ることはできません。