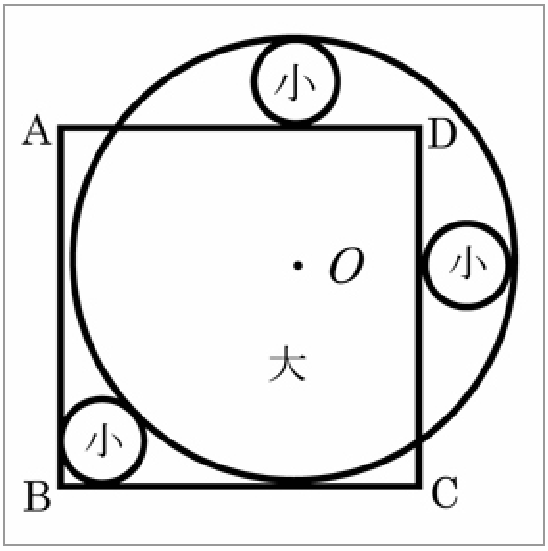
平成25年度出題問題［中級問題］

大円と正方形ＡＢＣＤが図のように交わっています。直径１寸の小円３個が、これらに内接しています。ただし、点Ｏは、大円の中心です。大円の直径を求めなさい。

※日吉神社(一関市)に弘化2年(1845)に奉納された算額の問題をもとにしました。



○審査員講評

はじめに、この出題について応募者その他に対し、この行事に対する信頼を揺るがしかねない戸惑いと混乱をおかけしたことをお詫び申し上げます。出題に慎重であるべきであったと反省しています。

算額の原文は、次の通りです。

今有如図及大円添方面容小円三個只云其小円径若干問大円径術如何

術　八個置　開平方　加三個　以乗小円径　得大円径

これは現代の式に表すと　$\text{大円径} = \left(\sqrt{8}+3\right)\times \text{小円径}$　という意味です。

解義書（奉納者の解答書）は残念ながらありません。問題文の「添」の解釈に係わる図が奉納者の真意かどうかもふくめ不明瞭でした。しかし、「中級問題としての難易の目安」から、接した図であれば、小円１個を使用すれば解答可能で中級として簡単すぎると判断しました。わずかな訂正を加え算額記載通りに出題しました。しかし、特に応募対象者である中学生に多大なご迷惑をおかけしました。

出題に無理があったかと反省し、ご意見等生かしながら今後はご迷惑おかけしないよう努めます。

寄せられた解法や意見等が応募の皆様方に把握されますようその内容を略記します。なお、出題通り疑問をいただかず解答された方、訂正して解答された方その他審査にあたっては様々配慮はしました。

① 条件を満たす図が画けないという意見など

ア 作図不能を確認した解答と意見。多数寄せられました。

・辺ＡＢと大円が接するか

・小円の位置関係

イ 図の場合の大円の存在範囲を示した解答

② 特に中学生は「大円が正方形に接するかしないか」という図の解釈に戸惑い解答に苦慮したようです。

③ 高齢者を中心に $3+2\sqrt{2}$ を５．８と近似値で求めた方がかなりおりました。正解としました。

④ 最初に「大円が正方形に接する」としての解答。

この場合、中学生が多いのですが、アとイの二通りがありました。

ア まず、問題は「接することを証明」。その後「接する場合で解答」という内容の答案。これには採点者一同感激いたしました。

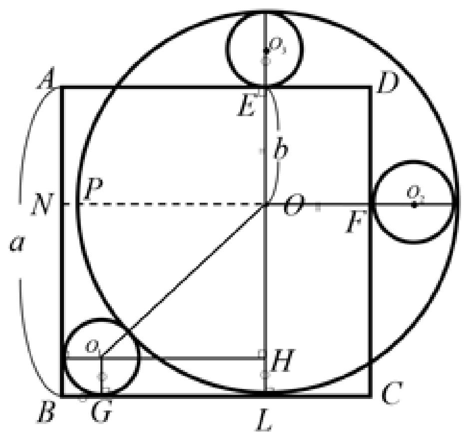
イ 最初から接するとして解答に分かれました。イが多数でした。

作図不可能の多くの意見、そして中学生を中心に「大円が正方形に接していないが、接することを証明して、大円の直径を求める問題として取り組んだ」という感想をも寄せられた素晴らしい答案その他、様々な意見やご指摘そして批判がありました。甘んじてお受け申し上げます。

○解答例

ここで解答例を示します。

解答１ 大円が辺ＡＢに接しない場合



大円の半径をＲ、小円の半径をｒ、その中心をＯ，Ｏ$_1$，Ｏ$_2$，Ｏ$_3$ とする。

大円と小円は接するから、接点と中心線は一直線上にある。

小円と正方形ＡＢＣＤの接点をＥ，Ｆ、Ｇとし、中心線Ｏ$_3$Ｏの延長線にＯ$_1$から下ろした垂線の足をＨとする。

正方形の一辺をａ、ＥＯ＝ＯＦ＝ｂとおけば

（ここでは、直線ＢＯ$_1$と直線Ｏ$_1$Ｏは同一直線でないとして解をすすめる）

図より　$2R-a=2r$　　・・・・・・・・（1）

$b=a-R$　　・・・・・・・・（2）

直角三角形O_1HOにおいて

$O_1O=R+r$

$OH=R-r$

$O_1H=a-r-b$

三平方の定理により　$(a-r-b)^2+(R-r)^2=(R+r)^2$

展開して整理すると　$a^2+b^2+r^2-4rR-2ar-2b(a-r)=0$

（1）と（2）を代入してaとbを消去すると

$R^2-6rR+r^2=0$

$R=(3\pm\sqrt{8})r$

$R=(3-\sqrt{8})r$　　のとき

$r=\frac{1}{3-\sqrt{8}}R=(3+\sqrt{8})R>R$　　R＞ｒに反する。　　不適

$\therefore\ R=(3+\sqrt{8})r$

$\therefore$ 大円の直径$=2R=(3+\sqrt{8})2r=(3+\sqrt{8})$小円の直径

さて、この解を検討します。

追

この解答１の式（２）は、縦の線分ＥＬでの成立です。横線分ＮＦで考えると、（１）は$a=2(2-2r)$で、ＮＰ＞０となり、大円と辺ＡＢは接します。

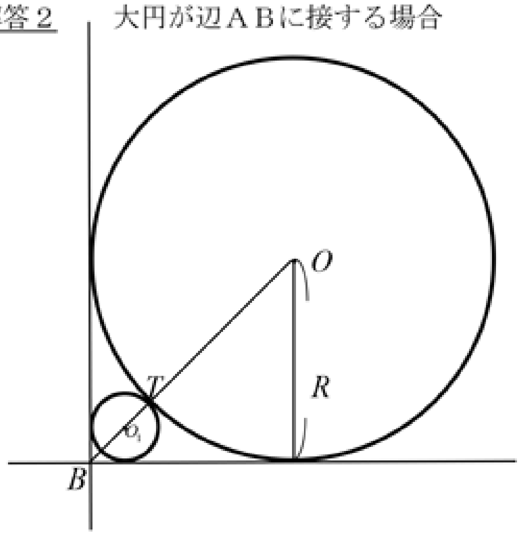
また　$O_1H=a-r-b$に（２）を代入すると

$O_1H=R-r$　　この段階で　$\angle OO_1H=45°$で

３点、Ｂ、O_1、Ｏは同一直線上にあることがわかります。つまり、大円も小円も正方形に接することがわかりました。

つまり、「結果」として出題図は不適当です。

解答２　大円が辺ＡＢに接する場合



$OB=\sqrt{2}R,\quad O_1B=\sqrt{2}r_1$　　であり

$OB=OT+O_1T+O_1B$

$\quad=R+r+\sqrt{2}r$　であるから

$\sqrt{2}R=R+r+\sqrt{2}r$

これより $\left(\sqrt{2}-1\right)R=\left(\sqrt{2}+1\right)r$

$$R=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}r$$

$$=\left(3+2\sqrt{2}\right)r$$

よって　$2R=\left(3+2\sqrt{2}\right)2r$

$\quad=3+2\sqrt{2}\quad(\because 2\mathrm{r}=1)$

（答）　$3+2\sqrt{2}$

解答２では図の一部分の使用で解答され、図が大げさものになり、かつ平易な問題になります。算額奉納者の出題意図は解答１の内容を期待しているのではないかとの推測からの出題でした。厳密性から「接することを示し」さらに「十分性」にまで言及された方々もおりました。

理由はともあれ、応募者にいらぬ戸惑いと疑問をあたえ申し訳なく思います。

今後は算額奉納者の意図を損ねることなく、不適切でない出題に努めます。様々なご意見、ご指摘ありがとうございました。

○解説

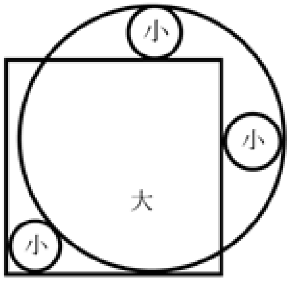
中級問題

中級問題は、一関市の日吉神社に弘化２年(1845)に奉納された算額の問題をもとにしました。日吉神社は　正平５年（1348年）勧請と伝えられる由緒ある神社で、古くから信仰を集めていました。

算額は、縦 49 ㎝、横 136 ㎝で、関流八伝の菅原市左衛門実春の門人６名が奉納しています。この問題は、３番目の問題です。

菅原市左衛門は、寛政 11 年(1799)、西岩井の滝沢村に生まれ、明治４年（1971）に 73 歳で没しています。千葉胤秀に学び、天保 15 年(1844)に一関市川崎町の浪分神社に算額を奉納しています。また、慶応元年（1865）にも、門人２名が、一関市花泉町の大門神社に算額を奉納しています。

この問題は、算額には以下のように記されています。



今有如図及大円添方面容小円三個只云其小円
径若干問得大円径術如何

答曰如左文

菅原与年蔵安高

術曰置八箇開平方加三個以乗小円径得大円径

合問

現代訳

問題　今、図のように大円及び方面(正方形)に添い小円３個を入れる。
その小円径(直径)が与えられている時、大円径はいくらか。

答え　術文のとおり

術（解き方）　８を平方に開き、３を加えて小円径をかけると大円径を得る。

$$\text{大円の直径} = \left(\sqrt{8}+3\right)\times \text{小円の直径}$$

術文の式は、現代の解答ともあっています。しかし、どのようにしてこの式にいたったかは、算額からは知ることはできません。