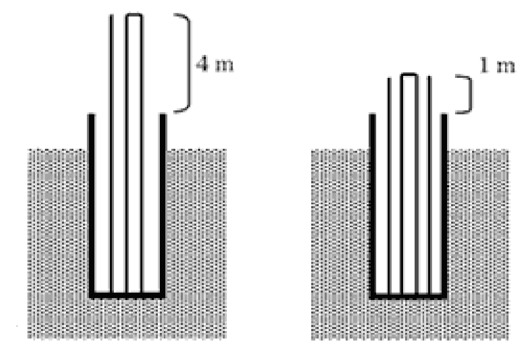
平成26年度出題問題［初級問題］

水（みず）のない井戸（いど）の深（ふか）さをはかるのに,縄（なわ）を使（つか）いました。縄（なわ）を３等分（とうぶん）にして束（たば）ねていれると,４メートル余（あま）りました。４等分（とうぶん）にして束（たば）ねていれると,1 メートル余（あま）りました。井戸（いど）の深（ふか）さと縄（なわ）の長（なが）さは何（なん）メートルでしょうか。

※文化12年（1815）に出版された『算法点竄指南録』（さんぽうてんざんしなんろく）の問題をもとにしました。



○審査員講評

昨年に引き続き、今回も多数の応募をいただきました。小学校、中学校、そして高等学校よりの日常の成果をまとめた応募が多いのが、特にも今回の目立った点でした。最年少で小学１年生の応募があり、周囲の暖かい配慮と本人の熱心な取り組みの姿勢には、驚き、うれしさ、頼もしさを感じた瞬間でした。

今回の問題はとりつき易い事柄であり、高校生以上であれば、解法が直ちに思いつく内容でしたので、本来のねらいの中心である小学生、中学生がどのくらい内容を理解し、斬新な発想で挑戦してくれるかが、期待をしていたところでした。

採点にあたっては①筋道がしっかりしていること、②すばらしい直観によるものを重視することを柱に、人数を増員し各応募者の意図する事を可能な限り汲みとり、その力作を吟味し進めました。

解答は、大きく２つに分類されました。

１つは、方程式などを使わない解答であり、小学生の応募者に多くありました。そこには、期待どおり、多様な解き方と発想がありました。具体的な数を代入、配列し、地道な作業を繰り返し正答にたどりついたとか、図を多用し考えを整理して進めたとか、特に井戸から出ている余りに着目し解に至るとか、地道に見えているもので処理に行く態度はすばらしく、自分で納得して論理を展開していく姿勢は、これからが非常に楽しみです。

２つめは、当然のことですが、方程式をつくり、解を導く方法です。中学生以上に多く見られました。既習の学習の活用の場ですが、誰が扱ってもすっきり進め得る方法だけに、しっかりした表現、解答ルールが望まれるところでした。立式の根拠、使用する文字が何を表しているか、どんな過程で解が得られるかなど、誰がみても理解できる表現がやや不足していた感がします。

大学生や大人の方のなかには、方程式を使用した解答と、そうではない解法の複数の解答を寄せていた方もおりました。

最後に、学校単位でのとりくみの結果の応募は、類似する解が出てくるのは避けられませんが、それでも自分で考え、正解にたどりついたという満足感と、喜びを表現する工夫がほしかった気がします。次回は、自分なりの解答を期待しています。

○解答例

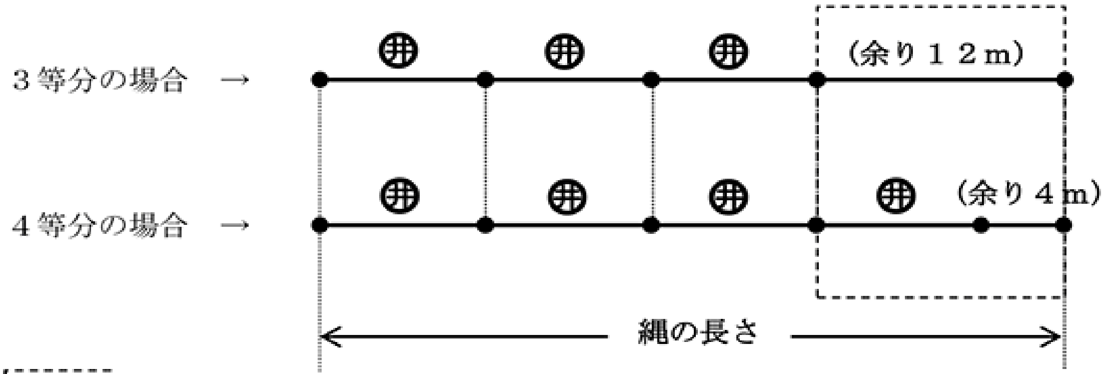
解答例１

井戸の深さを井とすれば

３等分して束ねた縄の長さは　井×３＋(余り４)×３＝３×井＋余り１２m

４等分して束ねた縄の長さは　井×４＋(余り１)×４＝３×井＋余り４m

同じ１本の縄なので、このことを図で表してみると次のようになる。



に注目すれば

３等分の場合の余り１２mは、４等分の場合の井＋余り４mと、同じ長さであることが、わかる。

したがって

井＝１２m－４m

＝８m

縄の長さは

３×井＋１２(あるいは４×井＋４)＝３×８m＋１２m

＝３６m

(答)　井戸の深さ　８m、縄の長さ　３６m

解答例２

縄を３等分したときの長さ(図 A)と,縄を４等分したとき長さ(図 B)の差は,

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ より,縄の長さの 12 分の 1(図 C)

この長さは,3mにあたる(図 D)

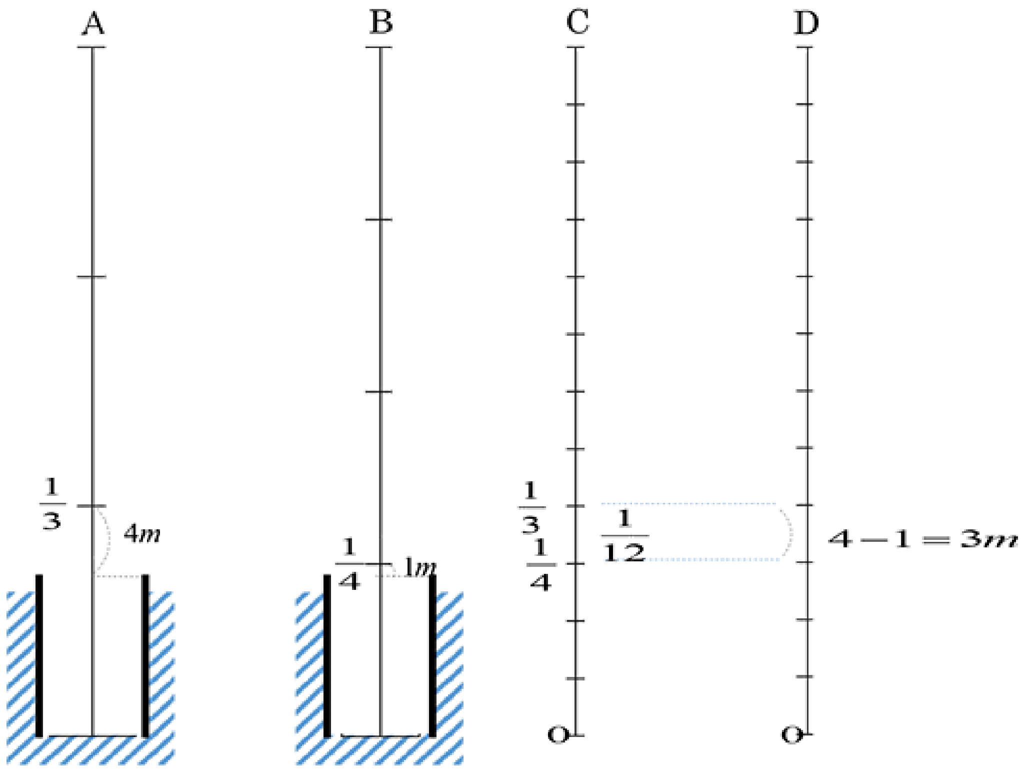
したがって,縄の長さは

$3\times12=36$

井戸の深さは,

$(36\div3)-4=8$

答　井戸の深さ　８ｍ，　縄の長さ　３６ｍ



解答例 3

井戸の深さを h　とする

縄を３等分して束ねて入れた時、縄の長さは

$3\times(h+4)$

縄を４等分してはかる時、縄の長さは

$4\times(h+1)$

したがって、縄の長さは同じであるから

$3\times(h+4)=4\times(h+1)$

これより　$h=12-4$　，　$h=8$　，

縄の長さは　$3(8+4)=4(8+1)=36$

答　井戸の深さ　８ｍ，　縄の長さ　３６ｍ

解答例 4

縄の長さを ℓ，井戸の深さを h とすると

$$\begin{cases} \dfrac{\ell}{3}=h+4\cdots① \\ \dfrac{\ell}{4}=h+1\cdots② \end{cases}$$

が成り立つ

①　，②　を連立に解けば

$$3h+12=4h+4$$

$$h=8$$

$$\ell=36$$

答　井戸の深さ　８ｍ，縄の長さ　３６ｍ

○解説

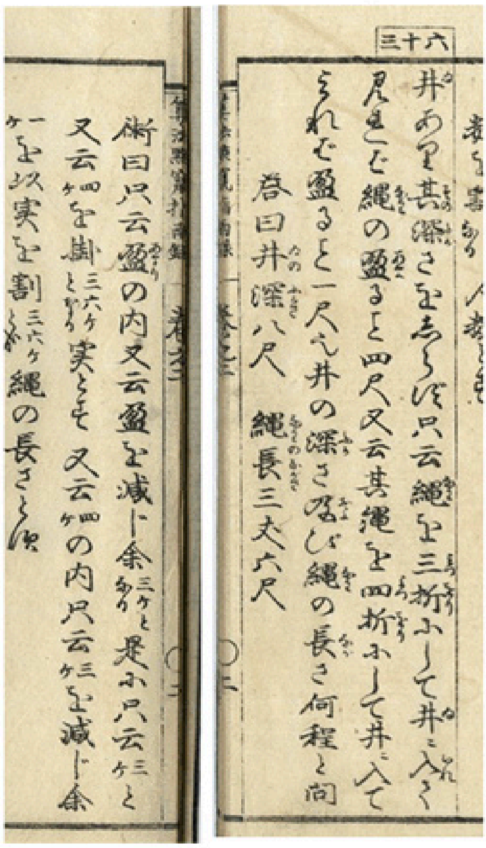
初級問題

初級問題は、文化１２年(1815)に出版された『算法点竄指南録』にある問題です。「点竄術」の「点」は「のこす」、「竄」は「のぞく」の意味で、加減乗除の計算を記号によってあらわす代数の方法のことです。

『算法点竄指南録』は、１５巻からなり、１９６の問題と解説が記されています。初心者から上級者まで学べるように編纂されています。初級の問題は、第６３問として２巻に問題、５巻に解説があります。

算法点竄指南録

《２巻　の　原文》



井ありその深さをしらず、只云う、縄を三折にして井ニ入て見れば縄の盈ること四尺、又云う、其縄を四折にして井ニ入てみれば盈ること一尺也。井の深さ及び縄の長さ何程と問。

答曰　井深八尺　縄長三丈六尺

術曰、只云盈の内、又云盈を減じ余三ケとなる、是に只云三ケと又云四ケを掛、三六ケとなる、実とす。又云四ケの内只云三ケを減じ余一ケを以実を割、三六ケとなる、縄の長さとす

《現代語訳》

井戸があります。その深さはわかりません。ただ、縄を三つ折りにして井戸に入れてみると、余りは４尺(しゃく)といいます。また、その縄を四つ折りにして井戸に入れてみると、あまりは１尺といいます。井戸の深さ及び縄の長さはいくらでしょうか。

答え　井戸の深さ　８尺

縄の長さ．　３丈(じょう)６尺

※尺は長さの単位で、１尺は約３０．３ｃｍ、１丈は１０尺。

術(解き方)

只云(三つ折りの場合)あまりの内、又云(四つ折りの場合)あまりを減じ、余り３ケとなる。　　4－1=3　　……*1

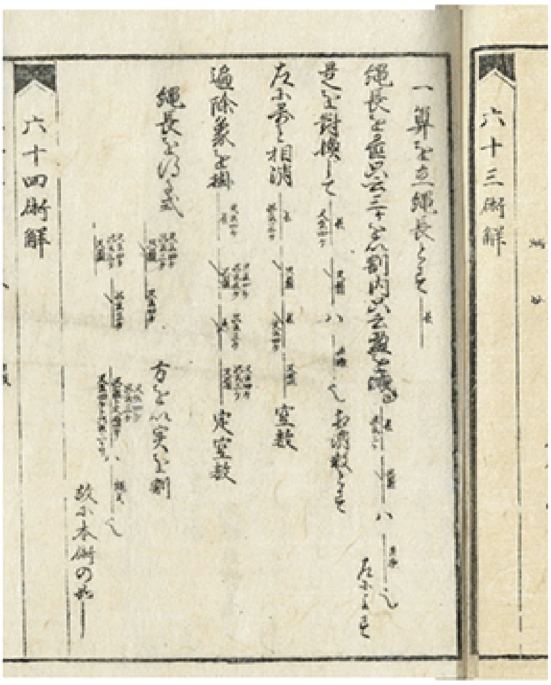
これに、只云う３ケと又云う４ケをかけ３６ケとなる。これを実とする。

３×３×4=３６…実とする　　……*2

又云う４ケの内、只云う３ケを減じ余り１ケで実を割る。３６ケとなる。縄の長さとする。　　4－3=1

３６÷1=３６…縄の長さ　　……*3

この術文では、どのような考えで式がでているかはわかりません。５巻の解説をみてみましょう。



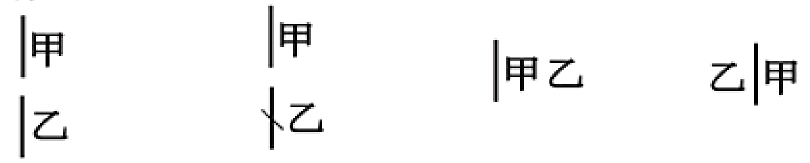
５巻では、点竄術による式が書かれています。点竄術は傍書法ともいい、関孝和が考案した式の表現方法です。

点竄術による式の表現

現代の式

甲＋乙	甲－乙	甲×乙	甲÷乙

点 竄 術



５巻の点竄術による式を現代の式に置き換えていくと、

一算を立て、縄長とす

縄長を置き、只云う(三つ折りにした場合)3ケをもって割り、うち只云うあまりを減

井深(井戸の深さ)なり。左に寄せる。

$$\rightarrow \frac{\text{縄長}}{3} - 4 = \text{井戸の深さ} \cdots ①$$

是を対換して(これと同じようにして)

$$\rightarrow \frac{\text{縄長}}{4} - 1 = \text{井戸の深さ} \cdots ②$$ 相消数とす。

左に寄せたのと相消(①－②)すと、空数(0)

$$\rightarrow \frac{\text{縄長}}{3} - 4 - \frac{\text{縄長}}{4} + 1 = 0 \qquad ※\left(\frac{\text{縄長}}{3} - 4\right) - \left(\frac{\text{縄長}}{4} - 1\right) = 0$$

遍く(あまねく)除象(数)をかけ、定空数　　　※両辺に3×4をかけ分母を払

$$\rightarrow \text{縄長} \times 4 - 4 \times 3 \times 4 - \text{縄長} \times 3 + 1 \times 3 \times 4 = 0$$

縄長を得る式

$$\rightarrow \underbrace{-(4\times3\times4)+(4\times3\times1)}_{<\text{実}>} \quad \underbrace{+(4-3)}_{<\text{方}>}\text{縄長} = 0 \qquad \cdots ③$$

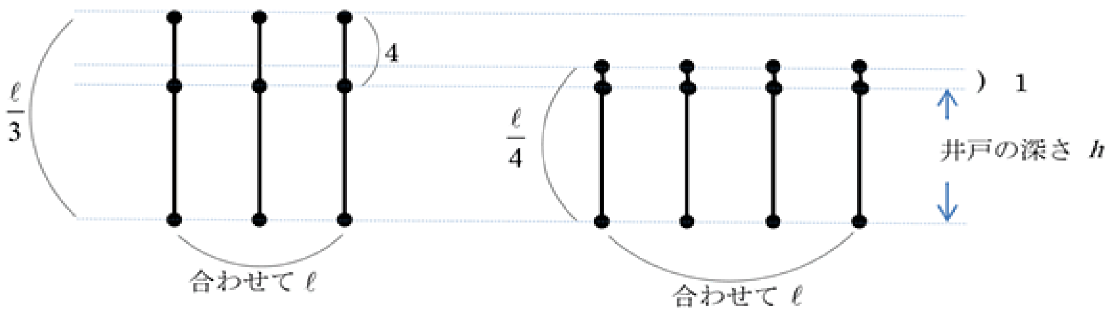
方をもって実を割る

$$\rightarrow \text{縄長} = \frac{(4\times3\times4)-(4\times3\times1)}{(4-3)} = \frac{(4-1)\times3\times4}{4-3}$$

$$= 36 \qquad \cdots ④$$

以上のように表わせます。

井戸の深さを　h　、縄の長さを　ℓ　とすると



井戸の深さを　h　、縄の長さを　ℓ　とすると

三つ折りにした場合と、四つ折りにした場合の折った場合次の式が成り立つ

$$\frac{\ell}{3}-4=h,\quad \frac{\ell}{4}-1=h \qquad \cdots ①②$$

そろばんを意識して、できるだけ分数を使わずに解き

③は、そろばんでは、左に「実」」、右に「法（方）」を置くので、このような表現になっています。井戸の深さは自明のこととして省略したものと思われます。

前に戻って、２巻の「術」をみると、

*1　は、

$$5巻の式 \qquad \frac{縄長}{3}-4-\frac{縄長}{4}+1=0 \quad より$$

$$\frac{縄長}{3}-\frac{縄長}{4}=(4-1)=3$$

この式の右辺が（三つ折りの場合のあまり）－（四つ折りの場合のあまり）

となっているので、この部分だけを簡潔に示し

*2　は、分母を払う計算で

$(4-1)=3$　　に3×4　をかければ　$3\times3\times4=36$　　　これを「実」とする

$\left(\frac{\ell}{3}-\frac{\ell}{4}\right)\times3\times4=(4\ell-3\ell)=1\ell$　　　　これは5巻では「方（法）」

*3　は、　$1\ell=36$　　より　$\ell=36\div1=36$

「術」は、「解」の流れを要点のみで示しているので、理解しにくい記述になっています。多くの和算書の「術」は、このような進め方になっています。