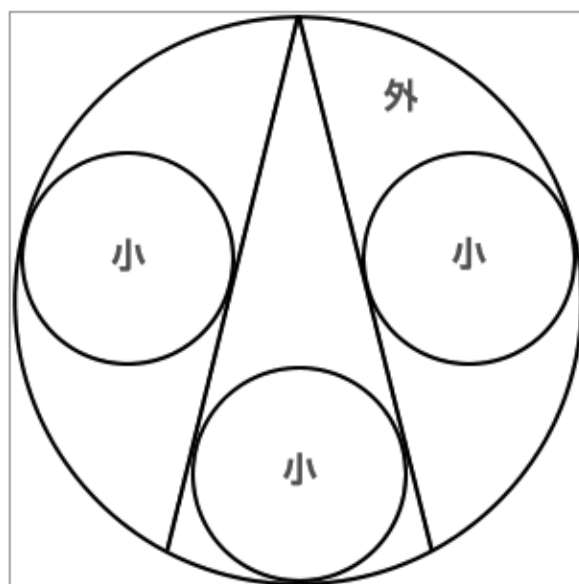


平成26年度出題問題【中級問題】（中学・高校生向き）

外円内に、図のように合同な小円が3個入っています。弓形に接する左右の小円は弦の中点で接しています。

外円の直径が1寸のとき、小円の直径を求めなさい。

※文政13年（1830）刊『算法新書』の問題をもとにしました。



○審査員講評

中級問題には、563件の応募がありました。応募者数は559人で、年齢別では、10代が448人、20代4人、30代10人、40代14人、50代30人、60代22人、70代18人、80代10人、不明3人でした。特徴としては、団体応募の中高生を含む10代が多く、20代は少ないものの各年代に亘って応募がありました。

正答率は、約80パーセントであり、過去12回の正答率と比較すると6番目となりました。

相似三角形の対応辺の比のみで解ける問題なので、取り組み易い問題であったと思います。

正答例としては次の方法で解いたものが殆どでありました。

- ① 相似な三角形を見出し、辺の相似比から大円径と小円径の関係式を導く。
- ② 座標を利用した解法。

誤答となった例としては、直径と半径を混同しながら進めている（外円の半径を1とした例、小円の直径を求めるのに半径で示している例）など、ケアレスミスのような間違いが見られました。

審査をしながら感じたことですが、今後のために次のようなことに留意されると良いかと思います。

- ・図をきれいに書くように心がけること。

解が見えてきます。

- ・使用する文字の区分を明確にして解き進めたい。

例えば、図中の点の位置は、大文字のローマ字で、2点間の距離や長さは小文字のローマ字で表すなど。

- ・示すべき点をはっきり示して進めること。

今回の問題においては、なぜ相似なのか、なぜ比が成り立つのか、なぜ不適な解があるのか等々。

- ・筋道を明快に進めるよう心がけたい。

相手に理解させる工夫を、しかし説明がくどくならないように。

以上、思いついたことを書き連ねてみました。今後の答案作成の参考にしていただければ幸いです。

今回も寄せられた答案に皆様方の熱気を感じながら審査をさせていただきました。

ある方から次のようなコメントがありました。「鳥か虫の顔のように見える問題図にひかれて、またチャレンジしてみたくなり、正月休みに頭をひねりました。」心とむ思いをしながら審査させていただきました。

模範解答や各賞の選定には、何れの答案も甲乙付け難く審査員一同悩みましたが、解法ができるだけ簡潔かつ明快に展開されているものを選定させていただきました。

今後もより良い問題を提供し皆様とともに勉強すべく更に努力して参りたいと思っております。

○解答例

図のように、点 A 、 B 、 C を定め、外円の中心を O 、小円の中心をそれぞれ O_1 、 O_2 、 O_3 とする。
また、線分 AC と小円 O_1 との接点を P_1 、小円 O_2 との接点を P_2 とおく。

いま、外円の直径を a 、小円の直径を x とすると、

$\triangle AOP_1$ と $\triangle AO_2P_2$ において

$\angle P_1AO = \angle P_2AO_2 = \angle CAB = \text{共通}$

$\angle OP_1A = \angle O_2P_2A = \angle R$

よって

$\triangle AOP_1 \sim \triangle AO_2P_2$

$\therefore AO : OP_1 = AO_2 : O_2P_2 \quad \dots \textcircled{1}$

ここで

$$AO = \frac{a}{2}, \quad OP_1 = \frac{a}{2} - x, \quad AO_2 = a - \frac{x}{2}, \quad O_2P_2 = \frac{x}{2}$$

であるから、これらを①に代入して

$$\frac{a}{2} : \left(\frac{a}{2} - x \right) = \left(a - \frac{x}{2} \right) : \frac{x}{2}$$

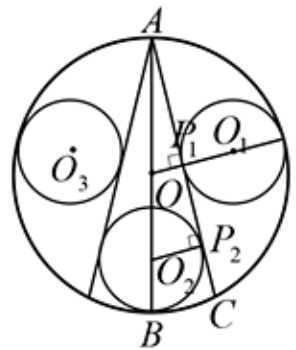
$$\frac{a}{2} \times \frac{x}{2} = \left(\frac{a}{2} - x \right) \times \left(a - \frac{x}{2} \right)$$

$$\frac{1}{4} \times ax = \frac{1}{4} (a - 2x)(2a - x)$$

$$ax = 2a^2 - 5ax + 2x^2, \quad 2x^2 - 6ax + 2a^2 = 0$$

$$\therefore x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$\text{これを解くと, } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \times a,$$



最初の2行は、問題と答えで、次のようにあります。

外円の内に図の如く、小円三個を容る有、外径一寸、小径何程と問

答曰 小径三分八厘一毛九絲六忽余

以降は、解き方が書いていますが、三角形の相似を用いて比例関係で解いています。

現代風に直すと、次のようになります。

小径 = x 外径 = a , とおくと,

子丑和 = 外径 - 小径 = $a - x$

$$\text{丑} = \frac{\text{外径}}{2} - \text{小径} = \frac{a}{2} - x$$

寅卯和 = 外径 = a

$$\text{卯} = \frac{\text{小径}}{2} = \frac{x}{2}$$

三角形の相似比より

卯 : 寅卯和 = 丑 : 子丑和

$$\frac{x}{2} : a = \left(\frac{a}{2} - x \right) : (a - x)$$

$$\frac{x}{2}(a - x) = a \left(\frac{a}{2} - x \right)$$

$$\therefore -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}ax - \frac{x^2}{2} = 0$$

両辺に2をかけ、外径 a^2 でわると

$$-1 + 3\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$$

$$\frac{x(\text{小径})}{a(\text{外径})} = X \quad \text{とおくと}$$

$$-1 + 3X - X^2 = 0$$

これを解くと

$$X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} (\text{正多商}), \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (\text{正少商})$$

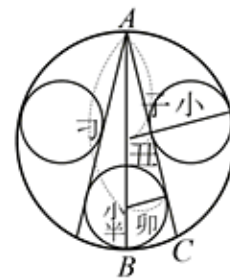
ここで $a = 1$ より, $X = x$ ゆえ

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

両商をみるに多商 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ は外径1 より多く不適

$$\therefore x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \doteq \frac{3 - 2.2360679}{2} \doteq 0.3819665$$

(答) 小径三分八厘一毛九絲六忽余



「𠂔」は「寅」の異体字です。

最初の2行は、問題と答えで、次のようにあります。

外円の内に図の如く、小円三個を容る有、外径一寸、小径何程と問

答曰 小径三分八厘一毛九絲六忽余

以降は、解き方が書いていますが、三角形の相似を用いて比例関係で解いています。

現代風に直すと、次のようになります。

小径 = x 外径 = a , とおくと,

子丑和 = 外径 - 小径 = $a - x$

$$\text{丑} = \frac{\text{外径}}{2} - \text{小径} = \frac{a}{2} - x$$

寅卯和 = 外径 = a

$$\text{卯} = \frac{\text{小径}}{2} = \frac{x}{2}$$

三角形の相似比より

卯 : 寅卯和 = 丑 : 子丑和

$$\frac{x}{2} : a = \left(\frac{a}{2} - x \right) : (a - x)$$

$$\frac{x}{2}(a - x) = a \left(\frac{a}{2} - x \right)$$

$$\therefore -\frac{a^2}{2} + \frac{3}{2}ax - \frac{x^2}{2} = 0$$

両辺に2をかけ、外径を a^2 でわると

$$-1 + 3\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 0$$

$$\frac{x(\text{小径})}{a(\text{外径})} = X \text{ とおくと}$$

$$-1 + 3X - X^2 = 0$$

これを解くと

$$X = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} (\text{正多商}), \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (\text{正少商})$$

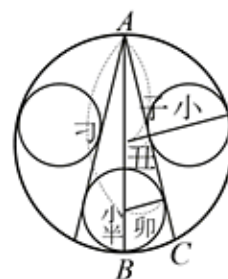
ここで $a = 1$ より, $X = x$ ゆえ

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

両商をみるに多商 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ は外径1 より多く不適

$$\therefore x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx \frac{3 - 2.2360679}{2} \approx 0.3819665$$

(答) 小径三分八厘一毛九絲六忽余



「子」は「寅」の異体字です。