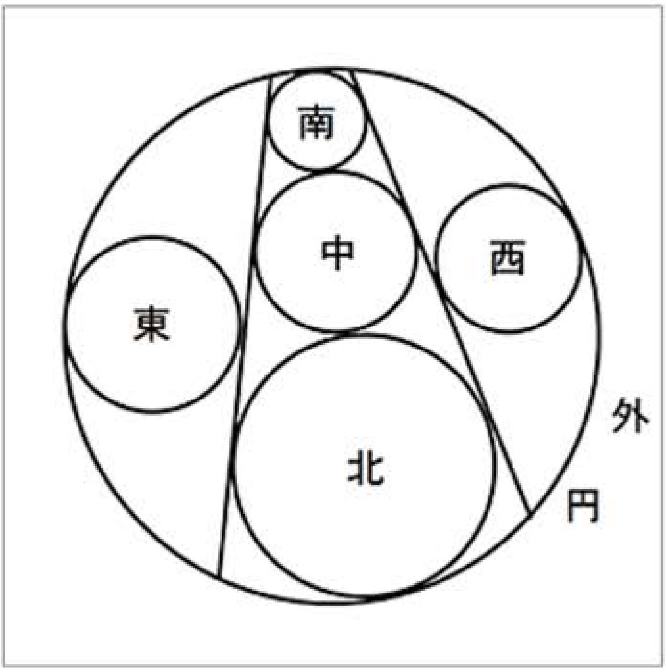
平成28年度出題問題③［上級問題］（高校生以上）

・岩手県一関市の観音寺に弘化4年（1847）に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、直径が等しくない6円があります。
東円、西円、南円、北円は外円の内接円です。中円は南円、北円に外接しています。南円、中円、北円は外円の2本の弦に接し、東円、西円は弦の中点で接しています。
北円の直径を、東円の直径、西円の直径、南円の直径を用いて表しなさい。



○審査員講評

上級問題は，87 件の応募があり，51 件の解答が正解でした。正解者は 50 代，60 代が多く，複数解答の方もいました。高校生も２名正解でした。

一関市博物館から東へ３Km ほどのところ，東北自動車道一関ＩＣ の近くにある赤荻観音寺に奉納された算額（現存）をもとにした問題です。原文は「東西南円径各若干」となっており，具体的数値が与えられていません。したがって，文字式の操作になります。

「地道になおかつミスをおかさずに計算すれば，いつかは正解にたどり着く方法でやりました。」，「平成２６年度の問題と似ていたので，同じように補助線を考えました。円の数が増えた分計算は複雑でしたが，うまく因数分解することができて最後の結果がとてもきれいな式になり感動しました。」と感想に記されていました。

東円径と西円径の相乗平均，南円径と北円径の相乗平均は，ともに中円径となります。

（東円径）×（西円径）＝（南円径）×（北円径）＝（中円径）×（中円径）

というきれいで不思議な関係があることに言及されている方もいました。

代数式（有限個の数と文字が，加減乗除および累乗根を求める演算の有限回の組合せによって結びつけられたもの）の操作で計算をした解答が多くみられました。計算量が増えますが，根気強さに感服いたしました。問題の図形を傾けて見やすいように工夫した答案もありました。

解答の方法としては次のような答案が見られました。

Ⅰ　代数式の計算
Ⅱ　三角比の利用
Ⅲ　和算風の解答
Ⅳ　デカルト座標の利用
Ⅴ　計算量を少なくするための定理や補助定理の利用

他に，２次方程式の解と係数の関係，ヘロンの公式，三円傍斜術やケージーの定理を用いた専門性の高い解答もあり，極形術に言及された方もいて審査員も勉強させられました。

解答にたどり着かない途中までの状態で提出した高校生が複数いました。最終的な答を記入してから応募していただきたいと考えています。

平成 18 年度から応募されている方の感想に，「今年も 12 月１日がとても待ち遠しく，恋人に会うくらい，うきうきと待ち焦がれていました。」とありました。このような感想は，一関市博物館や出題者・審査員の大きな励みになります。賞の候補の選定には甲乙付けがたく，苦心いたしましたが，できるだけ新人をと心がけ仕上げの丁寧さ，美しさなどを考慮いたしました。

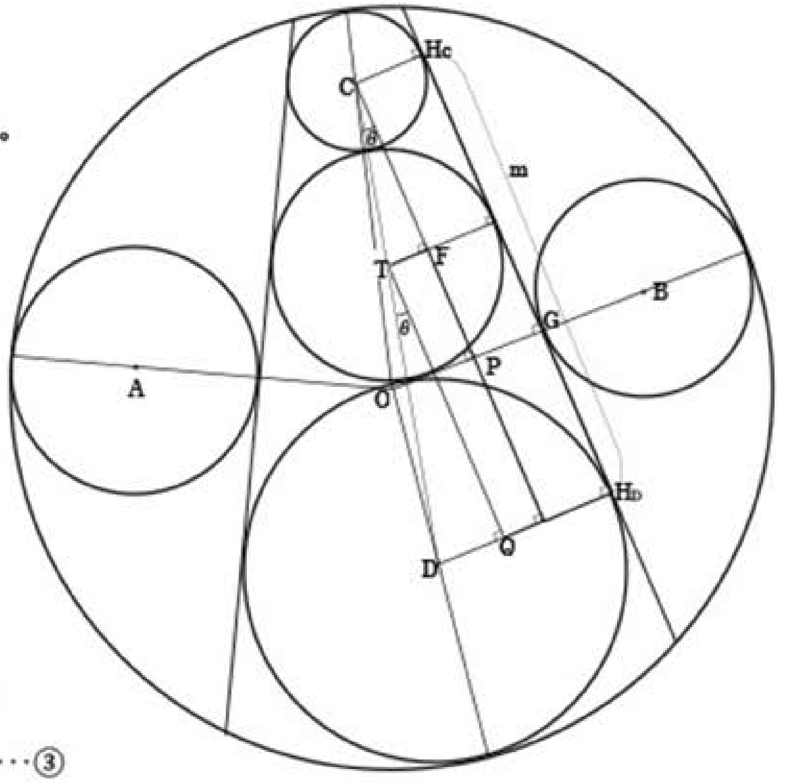
挑戦者の皆様の熱意と根気に敬意を表しまして審査を終わらせていただきます。

○解答例

解答例 1

図のように東円，西円，南円，北円，中円，外円をそれぞれ

$A\left(\frac{a}{2}\right)$，$B\left(\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{c}{2}\right)$，$D\left(\frac{d}{2}\right)$，$T\left(\frac{t}{2}\right)$，$O\left(\frac{r}{2}\right)$ とする。



(Ⅰ)南円径，北円径，中円径の関係を求める。

$\angle TCF = \angle DTQ = \theta$ とする。

$\triangle TCF \backsim \triangle DTQ$ より

$$\sin\theta = \frac{TF}{CT} = \frac{DQ}{TD}$$

$$\sin\theta = \frac{\frac{t}{2} - \frac{c}{2}}{\frac{t}{2} + \frac{c}{2}} = \frac{\frac{d}{2} - \frac{t}{2}}{\frac{d}{2} + \frac{t}{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{t - c}{t + c} = \frac{d - t}{d + t}$$

したがって $t - c = (t + c)\sin\theta$ ････①

$d - t = (d + t)\sin\theta$ ････②

①より $c = \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\, t$ $(\because \sin\theta \neq -1)$ ････③

②より $d = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}\, t$ $(\because \sin\theta \neq 1)$ ････④

③④より $c\,d = t^2$ ･･････⑤

(Ⅱ) 南円北円の共通外接線の長さ，東円径，西円径，南円径，北円径の関係を求める。

図のように，円 B 側の弦と円 C，円 D の接点をそれぞれH_C，H_Dとする。

三平方の定理より $H_CG = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 - \left\{\frac{r}{2} - \left(b + \frac{c}{2}\right)\right\}^2} = \sqrt{b}\sqrt{r - b - c}$ ････⑥

同様に， $H_DG = \sqrt{b}\sqrt{r - b - d}$ ･････････････････････････⑦

⑥⑦より $H_CH_D = \sqrt{b}\left(\sqrt{r - b - c} + \sqrt{r - b - d}\right)$ （$=m$ とおく）

$$b\left\{2r - (2b + c + d) + 2\sqrt{(r - b - c)(r - b - d)}\right\} = m^2$$

$$4b^2\{r - (b + c)\}\{r - (b + d)\} = \left[\left\{m^2 + b(2b + c + d)\right\} - 2br\right]^2$$

$$4bm^2r = m^4 + 2b(2b + c + d)m^2 + b^2(c - d)^2$$ ･････････････････････････⑧

⑧は b を a に置き換えても成り立つから

$$4am^2r = m^4 + 2a(2a + c + d)m^2 + a^2(c - d)^2$$ ･････････････････････････⑨

⑧ × a − ⑨ × b より $(a - b)\left\{m^4 - 4abm^2 - ab(c - d)^2\right\} = 0$

a ≠ bだから　$m^4-4abm^2-ab(d-c)^2=0$ ……………………⑩

(Ⅲ) 東円径，西円径，中円径の関係を求める。

③④より　$d-c=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}t-\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}t=\dfrac{4t\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=4t\sin\theta\sec^2\theta$ ……………⑪

⑪を用いると　$CD=\dfrac{DH_D-CH_C}{\sin\theta}=\dfrac{d-c}{2\sin\theta}=\dfrac{4t\sin\theta\sec^2\theta}{2\sin\theta}=2t\sec^2\theta$ ……………⑫

⑫を用いると　$m^2=(H_CH_D)^2=(CD\cos\theta)^2=(2t\sec^2\theta\cos\theta)^2=4t^2\sec^2\theta$ ……………⑬

⑪⑬を⑩に代入すると

$$(4t^2\sec^2\theta)^2-4ab\cdot4t^2\sec^2\theta-ab(4t\sin\theta\sec^2\theta)^2=0$$

$$(4t^2\sec^2\theta)^2-16abt^2(\sec^2\theta+\sin^2\theta\sec^4\theta)=0$$

$$16t^2\sec^4\theta-16abt^2\{\sec^2\theta+(1-\cos^2\theta)\sec^4\theta\}=0$$

$$16t^2(t^2-ab)\sec^4\theta=0$$

$16t^2\sec^4\theta\neq0$だから　$t^2=ab$ ……………………⑭

(Ⅳ) 東円径，西円径，南円径，北円径，中円径の関係から北円径を求める。

⑤⑭より　$cd=t^2=ab$

$$d=\frac{ab}{c}$$

したがって，

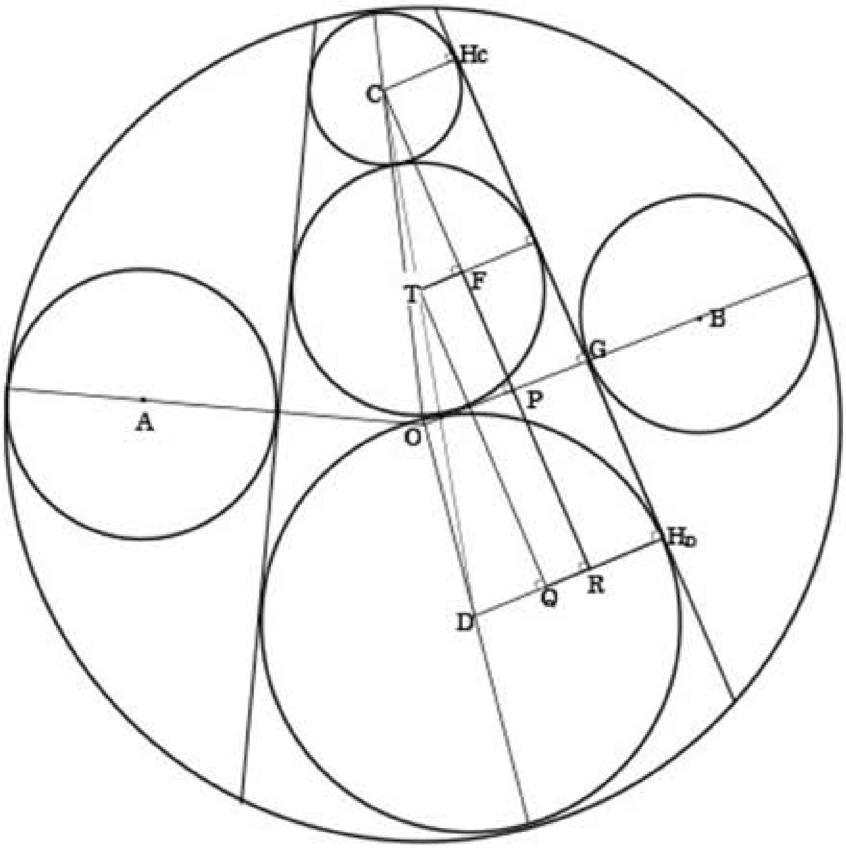
$$(\text{北円の直径})=\frac{(\text{東円の直径})\times(\text{西円の直径})}{(\text{南円の直径})}$$ ………… **(答)**

〔参考〕

(東円径) × (西円径) = (南円径) × (北円径) = (中円径) × (中円径)
という関係があります。
つまり，東円径と西円径の**相乗平均**、南円径と北円径の**相乗平均**は，ともに中円径となります。

解答例２

図のように東円，西円，南円，北円，中円，外円をそれぞれ
A(a)，B(b)，C(c)，D(d)，T(t)，O(r)とする。



三平方の定理より，

$$CF=\sqrt{CT^2-TF^2}=\sqrt{(c+t)^2-(t-c)^2}$$

$$=2\sqrt{c\,t} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に　$QT=2\sqrt{d\,t}$　$\cdots\cdots\cdots ②$

①②より

$$H_CH_D=CF+QT$$

$$=2\sqrt{t}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

△CDR に三平方の定理を用いると

$$H_CH_D=CR=\sqrt{CD^2-DR^2}$$

$$=\sqrt{(c+2t+d)^2-(d-c)^2}$$

$$=2\sqrt{(t+c)(t+d)} \quad \cdots\cdots ④$$

③④より

$$\sqrt{t}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{(t+c)(t+d)}$$

両辺を平方すると　$t\left(c+d+2\sqrt{c\,d}\right)=t^2+c\,t+d\,t+c\,d$

$$t^2-2t\sqrt{c\,d}+c\,d=0 \qquad \left(t-\sqrt{c\,d}\right)^2=0 \qquad t=\sqrt{c\,d} \quad \cdots\cdots ⑤$$

③⑤より　$H_CH_D=2\sqrt[4]{c\,d}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$　$\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$

△COP に三平方の定理を用いると

$$H_CG=\sqrt{CO^2-OP^2}=\sqrt{(r-c)^2-(r-2b-c)^2}=2\sqrt{b(r-c-b)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

同様に　$H_DG=2\sqrt{b(r-d-b)}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$

⑦⑧より　$H_CH_D=2\sqrt{b}\left(\sqrt{r-c-b}+\sqrt{r-d-b}\right)$　$\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$

⑥⑨より　$\sqrt[4]{c\,d}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{b}\left(\sqrt{(r-c)-b}+\sqrt{(r-d)-b}\right)$

両辺を平方すると

$$\sqrt{c\,d}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2=b\left\{(r-c)+(r-d)-2b+2\sqrt{(r-c)-b}\sqrt{(r-d)-b}\right\}$$

$$2b^2-\{(r-c)+(r-d)\}b+\sqrt{c\,d}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2=2b\sqrt{(r-c)-b}\sqrt{(r-d)-b}$$

$$(\text{左辺})^2 = 4b^4 + \{(r-c)+(r-d)\}^2 b^2 + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4 - 4\{(r-c)+(r-d)\}b^3$$
$$-2\{(r-c)+(r-d)\}\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b + 4\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b^2$$

$$(\text{右辺})^2 = 4b^2\{(r-c)-b\}\{(r-d)-b\}$$

$$= 4b^4 - 4\{(r-c)+(r-d)\}b^3 + 4(r-c)(r-d)b^2$$

$$(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 = \left[\{(r-c)-(r-d)\}^2 + 4\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2\right]b^2$$
$$-2\{(r-c)+(r-d)\}\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4$$
$$= \left[(c-d)^2 + 4\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2\right]b^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4$$
$$= \left[\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2 + 4\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2\right]b^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b$$
$$+ cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4 = 0$$

$$\left\{\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)^2 + 4\sqrt{cd}\right\}b^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\,b + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 b^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\,b + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 = 0 \qquad \cdots\cdots⑩$$

⑩はbをaに置き換えても成り立つから

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 a^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\,a + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 = 0 \qquad \cdots\cdots⑪$$

⑩⑪は，xについての2次方程式 $\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 x^2 - 2\{2r-(c+d)\}\sqrt{cd}\,x + cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2 = 0$ の解が

aとbであることを意味している。したがって2次方程式の解と係数の関係から

$$ab = \frac{cd\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2} = cd$$

$$2c \times 2d = 2a \times 2b$$

(南円の直径)×(北円の直径) ＝ (東円の直径)×(西円の直径)

したがって　　$(\text{北円の直径}) = \dfrac{(\text{東円の直径}) \times (\text{西円の直径})}{(\text{南円の直径})}$　　…………(答)

上級問題

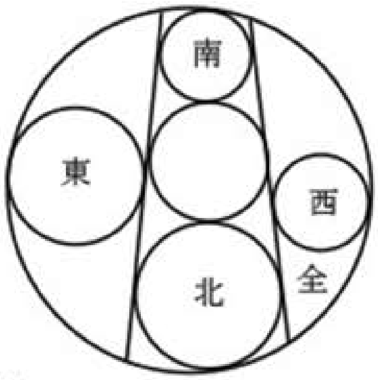
上級問題は、岩手県一関市の観音寺に弘化４年(1847)に奉納された算額の問題をもとにしました。

この算額は、近隣の村人 14 人が奉納したもので、観音寺にほど近いところで生まれた安倍(阿部)勘司が校閲しています。現在は色がかなり落ちていますが、奉納当初は赤や青、緑など色鮮やかに彩色が施されていたようです。

上級問題は、11 問めで、千葉治三郎胤定の門人の石川伝之助保良の作った問題です。

安倍(阿部)勘司の父は、一関藩の算術師範役となった関流七伝の和算家千葉胤秀(1775-1849)の高弟の阿部保定です。また、石川伝之助(1813-1877)の和算も孫に受け継がれ、孫幸平(1866-1956)は、昭和６年に結成された「関流数学交友会」の会長として、最末期にこの地方の和算の普及に努めています。この算額は、一関の和算の継承を表わすものとしても意味があります。

なお、観音寺には、この他に天保２年(1831)に阿部保定の門人によって奉納された算額も残っており、そちらは一関市指定有形文化財となっています。



今有外円内如図設二斜容五円　東西南円径各若干問得北円径術如何

千葉治三郎胤定門人

答曰如左文

石川伝之助保定

術曰置東円径 以下円径二字略之 乗西以南除之得北合問

《現代訳》

今、外円の中に図の如く２本の斜線と５個の円を設け、東西南円の直径が与えられたとき、北円の直径を求めなさい

答えて曰く、左の文のとおり

術に曰く

東円の直径を置き、西円の直径を掛け、南円の直径で割り、北円の直径を得る。

算額の文面だけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、最後の術文を現代の式であらわすと、

$$(\text{北円の直径})=\frac{(\text{東円の直径})\times(\text{西円の直径})}{(\text{南円の直径})}$$

となり現代の解答と一致します。