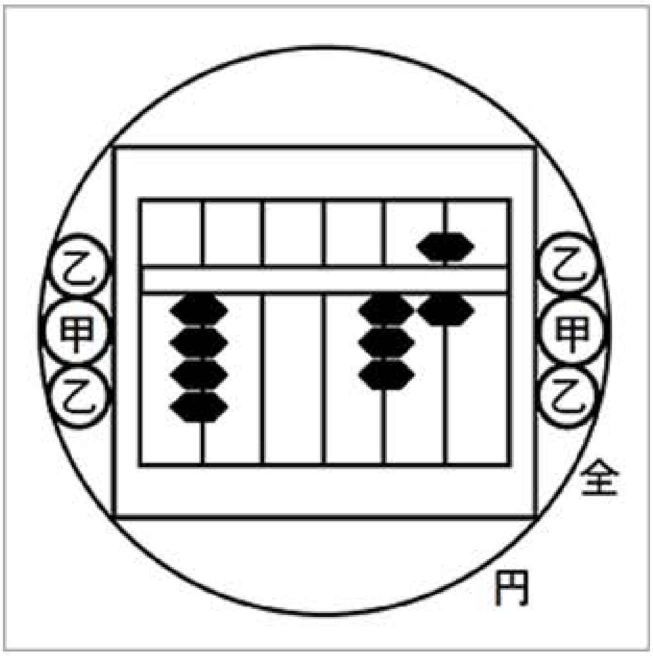
平成28年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県山田町の武内大明神社に文政3年（1820）に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありません。

図のように長方形（そろばんの外枠）、甲円、乙円が、全円に内接しています。
甲円は、長方形の縦の辺に中点で接しています。
乙円は、甲円に外接し、縦の辺にも接しています。
乙円の直径が1寸、長方形の縦が6寸のとき、全円の直径を求めなさい。



○審査員講評

東日本大震災で大被害があった、かつての南部藩領、岩手県山田町の武内大明神社に文政３(1820)年に奉納された算額の問題です。長方形を算盤（そろばん）で表現していますが、この算盤図には答の３６÷４＝９が表現されています。答は９寸であり、奉納者の機智が感じられます。感想欄を読むと何人かの方は気が付いたようです。類題が山本賀前編の『算法助術』(天保 12(1841) 年刊)にあります。

中級は中学生や高校生からの解答を期待し、三平方の定理など初歩的な幾何の知識そして簡単な２次方程式で解答される問題を県内の算額から出題しています。岩手県内の算額は江戸時代中期から幕末期、そして近代教育制度が採用された明治にかけてのものが多く、平易な問題は少ないので、応募者は時間をかけて解答して欲しいものです。

今年度、中級は応募者 409 名、応募数 412 と投稿数はやや頭打ちでした。解答には、三平方の定理を２回使用するか相似三角形という図形的な処理が必要で問題がやや難しかったことが要因と思われます。しかし、今回も出題者の解答とは異なる別解答が寄せられ「和算に挑戦」にふさわしい出題でもあったと思われます。

数学の問題の解答は１通りとは限りません。答の確認の意味からも別解を考えて欲しいものです。それは皆さんの数学的素養や人間性をも涵養するはずです。

課題等として提出された中学校や高等学校からたくさんの解答が寄せられました。今後も学校単位でも取組んでいただきたいものです。

岩手県和算研究会会長賞の方からは、３通りの解答が寄せられました。相似三角形を使用する解答、和算の「余弦定理」を使用する解答など発想ゆたかで努力がみえる解答に心底から敬服いたしました。女子高校生も相似を使用した明快な解答を寄せられました。その他の女子高校生からも類似の解答が寄せられ今回は女性の優れた解答が印象的でした。

残念な解答には、甲円の半径は無理数になりますが、わざわざ近似値を求めて使用して近似値を答とした方、特殊な文字を使用した方などがいました。また、途中の計算ミス、論理が不十分な解答など、もうすこし丁寧に解答してくれれば正解に到達したと思われる解答が、中学生や高校生に多数見られました。

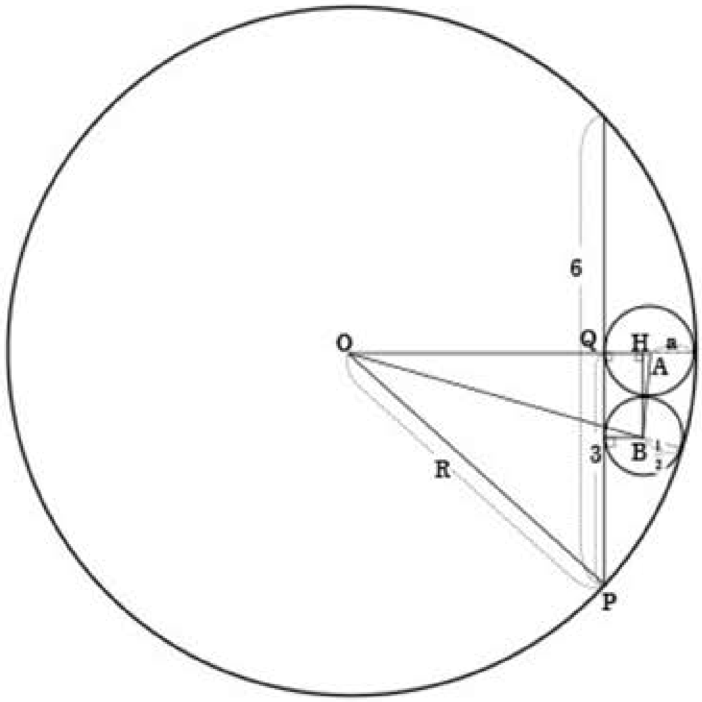
応募者は、解答集で応募者の解答を読みなおして、これからもお楽しみいただきたいものです。
次回以降も内接する２円の関係や三平方の定理を使用する問題が出題されることと思います。接円関係や相似関係その他を把握して素晴らしい解答が寄せられることを期待します。とりわけ今回応募された方は是非、次回も挑戦いただきたいものです。

○解答例

中級　解答例１

甲円，乙円，全円をそれぞれ$A(a)$，$B\left(\frac{1}{2}\right)$，$O(R)$とし，

ＢからＯＡに下ろした垂線の足をＨとする。



直角三角形ＯＰＱに三平方の定理を用いると，

$$OP^2=OQ^2+PQ^2$$

$$R^2=(R-2a)^2+3^2$$

$$4aR=4a^2+9 \cdots\cdots\cdots ①$$

直角三角形ＯＢＨと直角三角形ＡＢＨに三平方の定理を用いると，

$$OB^2-OH^2=AB^2-AH^2 \qquad (=HB^2)$$

$$\left(R-\frac{1}{2}\right)^2-\left\{R-\left(2a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-2R+4aR+2a-4a^2=2a$$

$$4aR-2R=4a^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①−②より

$2R=9$

したがって，

全円の直径＝９寸

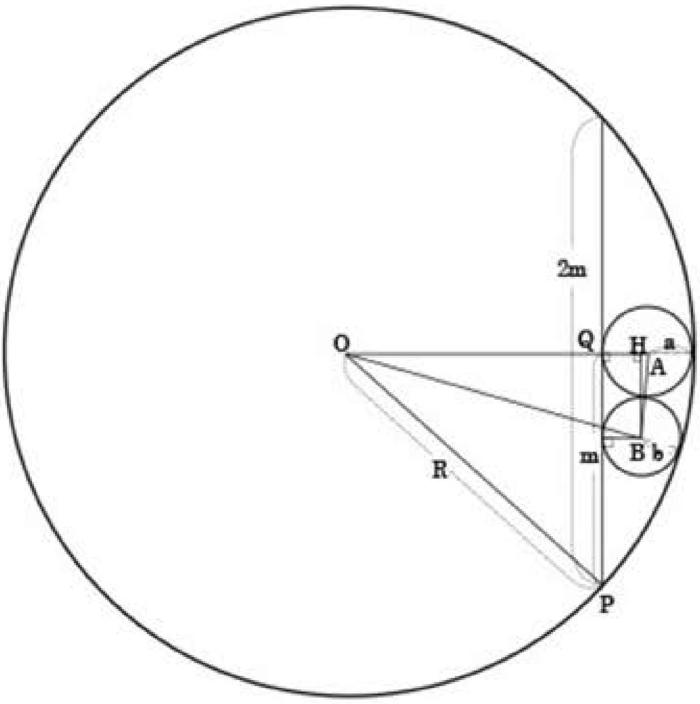
答．９寸

解答例２

甲円，乙円，全円，長方形の縦をそれぞれA(a)，B(b)，O(R)，２mとし，

BからOAに下ろした垂線の足をHとする。

BからOAに下ろした垂線の足をHとする。



直角三角形OPQに三平方の定理を用いると，

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

$$R^2 = (R - 2a)^2 + m^2$$

$$4aR = 4a^2 + m^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

直角三角形OBHと直角三角形ABHに三平方の定理を用いると，

$$OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2 \qquad (= HB^2)$$

$$(R - b)^2 - \{R - (2a - b)\}^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$-4bR + 4aR + 4ab - 4a^2 = 4ab$$

$$4aR - 4bR = 4a^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①－②より

$$4bR = m^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

$b = \dfrac{(\text{乙円径})}{2}$，　$R = \dfrac{(\text{全円径})}{2}$，　$m = \dfrac{(\text{長方形の縦})}{2}$　を③に代入すると，

$$4 \times \frac{(\text{乙円径})}{2} \times \frac{(\text{全円径})}{2} = \left\{\frac{(\text{長方形の縦})}{2}\right\}^2$$

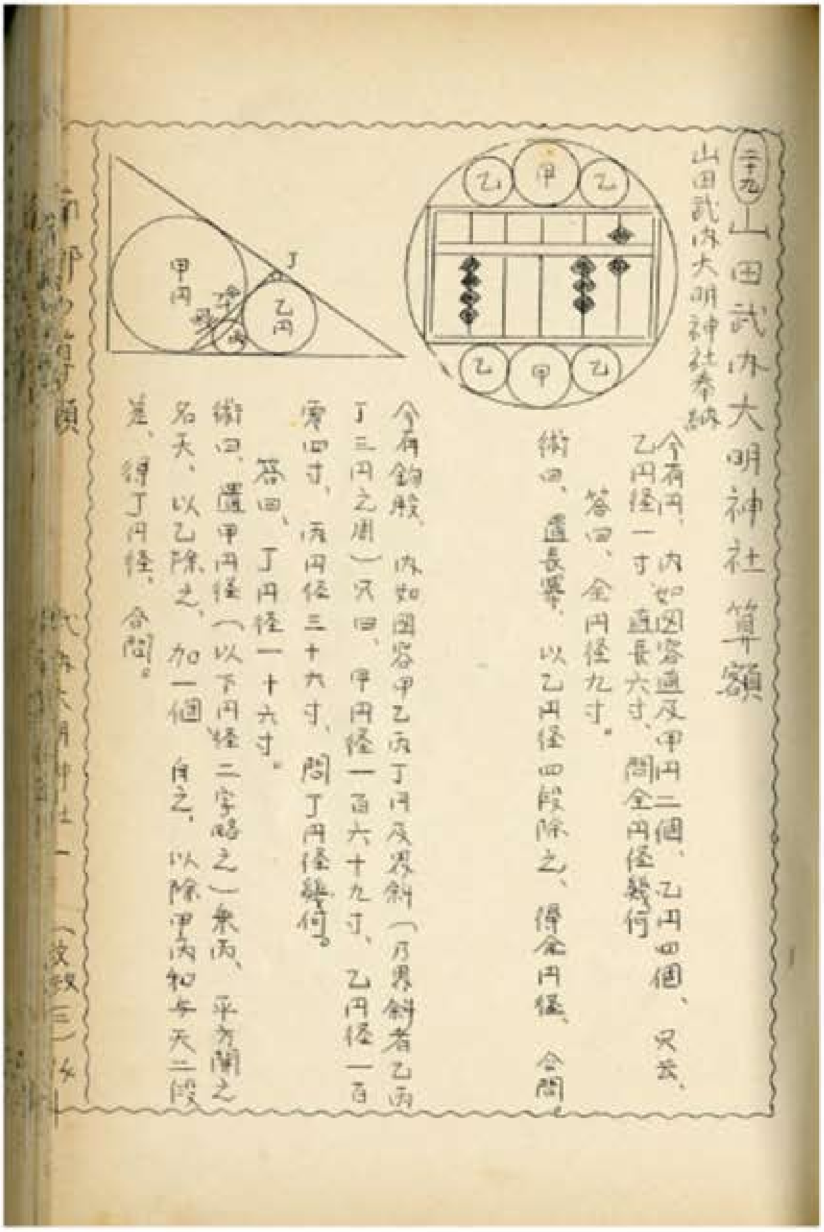
$$(\text{全円径}) = \frac{(\text{長方形の縦})^2}{4 \times (\text{乙円径})} = \frac{6^2}{4 \times 1} = 9$$

答．９寸

中級問題

中級問題は、岩手県山田町の武内大明神社に文政３年(1820)に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありませんが、『南部の算額』(平山諦・長瀬義本編、昭和42年)に、『邦内神壁算法』から採録したものとして掲載されています。これによると、山田武内大明神には、文政３年６月に一関の和算家千葉胤秀(1775-1849)の門人が奉納した算額が２点あり、いずれも４名が１人１題ずつ問題をあげています。

中級の問題の原典は、第１問で、伊藤権六の作成によるものです。中級問題では、図が見やすいように甲乙の円の位置を変えて出題しました。



（二十九）山田武内大明神社算額

山田武内大明神社奉納

今有円、内如図容直及甲円二個、乙円四個、只云、乙円径一寸、直長六寸、問全円径幾何。

答曰、全円径九寸。

術曰、置長冪、以乙円径四段除之、得全円径、合問。

今有鈎股、内如図容甲乙丙丁円及界斜（乃界斜者乙丙丁三円之周）只曰、甲円径一百六十九寸、乙円径一百四寸、丙円径三十六寸、問丁円径幾何。

答曰、丁円径一十六寸。

術曰、置甲円径（以下円径二字略之）乗丙、平方開之名天、以乙除之、加一個 自之、以除甲内加毎天二段差、得丁円径、合問。

『南部の算額』

《現代訳》

今、円があり図の如く直(長方形)と甲円２個、乙円４個をいれる。乙円の直径が１寸、長方形の横が６寸のとき、全円の直径はいくらになるか。

答えて曰く

全円の直径は９寸

術に曰く

長さを２乗し、乙円の直径に４をかけて割る。全円の直径を得て問いに合う。

これだけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、現代の解答と一致します。