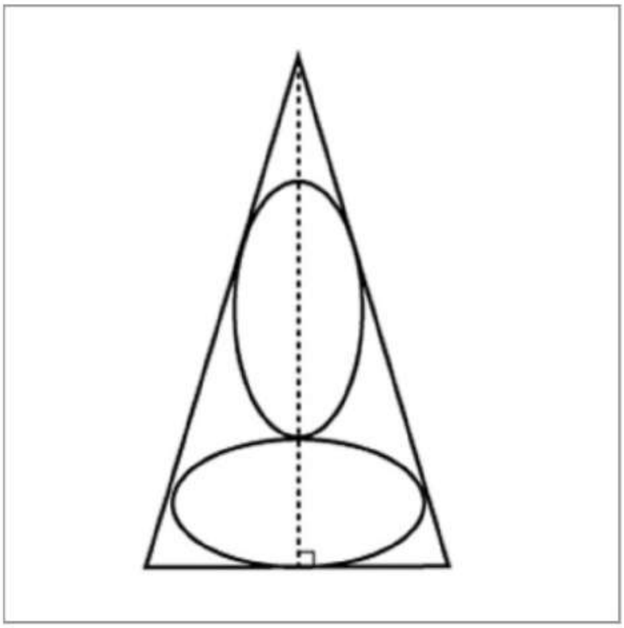
平成29年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・岩手県一関市の白山神社に慶応2年（1866）に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、外接する2つの合同な楕円が二等辺三角形の等辺に接し、下の楕円は、底辺にも接しています。
上の楕円の短軸、下の楕円の長軸は底辺に平行で、短軸の長さは1寸です。
長軸の長さが変化すると、二等辺三角形の高さ（破線の長さ）も変化します。
二等辺三角形の高さが最小となるときの高さを求めなさい。



○審査員講評

一関市周辺の算額には，楕円（和算では側円といいます）の問題が多数あります。その中からの出題でした。

上級問題の応募数は124件，正答は110件で，ともにここ3年間では最も多くなりました。高校生の応募も多くなりました。年代別の割合でみると，例年の傾向ですが，20～40歳代が少なく，50～70歳代が多い結果となりました。

寄せられた解答のうち，正答の主な流れとしては，次のようにまとめられます。

Ⅰ　二等辺三角形の高さを長径の式で表すために，
　① 解析幾何を用いる。（媒介変数表示の楕円の方程式などを含む。）
　② 図形を一定の方向に拡大・縮小する。

Ⅱ　二等辺三角形の高さの最小値を求めるために，
　① 微分法を用いる。
　② 実根条件，平方完成，判別式を用いる。
　③ 相加平均≧相乗平均を用いる。

Ⅰについては，①の解法は，計算量が多くなる傾向がありました。和算では，座標を用いた解析幾何の考えはありませんでした。この算額の解義書（和算による解法）の存在は確認していませんが②の方法で解いたと思われます。楕円を円に変換する方法で，和算家はこれを用います。数学的には，この変換はアフィン（アファイン，ａｆｆｉｎｅ）変換であり，線形性が保存されます。『算法助術』の八十二番で等脚台形に内接する楕円を扱っています。「問題の図をアフィン変換すると，片方の楕円は円になるが，もう一方の楕円は楕円のままなので，アフィン変換は使えない。」という内容の感想をもたれ，解析幾何で解いた方もいました。

参考文献として，

・一関市博物館ホームページ 「和算に挑戦」平成 16 年度上級問題 解答例 解説

・10 周年記念誌 和算に挑戦　編集・発行 一関市博物館　136 頁

・ 新解説・和算公式集 算法助術　土倉保編著　朝倉書店

などをご覧下さい。

Ⅱについては，和算家は，極大値，極小値を求めるとき『適尽法（てきじんほう）』を用いることがあります。微分を用いない場合は②③を用いることができます。③の相加平均≧相乗平均を用いる解法は出題者も予想していませんでしたので，非常に勉強になりました。

楕円の長軸の長さを「楕円の中心から長軸の端点までの距離」，楕円の短軸の長さを「楕円の中心から短軸の端点までの距離」ととらえてしまった誤答がみられました。

今年度は，平成16年以来の楕円についての問題でした。「今回の問題は簡単でした。もっと難しい問題を出題してほしいです。」という内容の感想を持たれた方もいました。できるだけ多くの方々が興味をもてる和算問題を提供していきたいと思います。素晴らしい解答が多く，賞の選定には苦慮しますが，今回も解法ができるだけ簡潔で明快に展開されているものを選定させていただきました。「今までは円に関する問題がほとんどだった。この楕円の問題はシンメトリーな美しい図形の問題です。答えはあまりにも綺麗な値です。」，「最後にシンプルな解が出た時は，感動しました。」「来た，来た，待ち遠しかった12月1日が来た。毎年，楽しい問題をありがとうございます。」という内容の感想がありました。一関市博物館「和算に挑戦」事業に関わるものにとって大変励みになる言葉です。寄せられた答案から，挑戦者のファイトを感じながら審査をさせていただきました。皆様とともに勉強すべく更に努力してまいりますので今後ともよろしくお願いいたします。

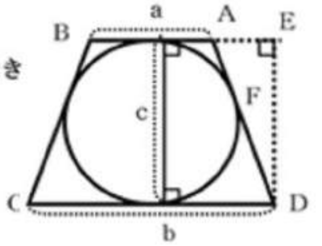
○解答例

【解答例１】

【予備定理】

右図のように，上底ａ，下底ｂの等脚台形ＡＢＣＤに 直径ｃの円が内接しているとき

$$c^2 = ab$$



［証明］

辺ＡＤと円の接点をＦとすると，$AD = AF + DF = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

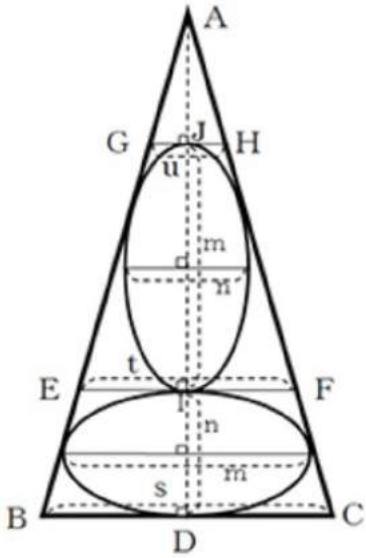
Ｄから直線ＡＢへの垂線の足をＥとすると　$AE = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$

直角三角形ＡＤＥに，三平方の定理を用いると　$c^2 = ED^2 = AD^2 - AE^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = ab$

図のように，二等辺三角形ＡＢＣの底辺ＢＣと下の楕円の接点（ＢＣの中点）をＤ，上の楕円の長軸の端点Ｉ，Ｊでの接線をそれぞれＥＦ，ＧＨとする。

また，合同な２つの楕円の長軸，短軸の長さをそれぞれm，ｎとする。

$BC = s$，　$EF = t$，　$GH = u$，　$AD = h$　とおく。



【Ｉ】　図を縦方向に$\frac{m}{n}$倍(アフィン変換)すれば，等脚台形ＥＢＣＦの高さは変わるが，上底，下底はそれぞれｔ，ｓのままで，それに内接する楕円は直径mの円となる。

このことから【予備定理】を用いると，　$m^2 = st$　……………………①

【Ⅱ】　図を縦方向に$\frac{n}{m}$倍(アフィン変換)すれば等脚台形ＧＥＦＨの高さは変わるが，上底，下底はそれぞれｕ，ｔのままで，それに内接する楕円は直径ｎの円となる。

このことから【予備定理】を用いると，　$n^2 = tu$　……………………②

①，②を用いると　$\frac{u}{s} = \frac{tu}{st} = \frac{n^2}{m^2}$　………………③

また △ＡＪＨ∽△ＡＤＣより，

$JH : DC = AJ : AD = (AD - JD) : AD$

$\frac{u}{2} : \frac{s}{2} = \{h - (m+n)\} : h$

$\frac{u}{s} = \frac{h - (m+n)}{h}$　……………………④

③④より　$\frac{n^2}{m^2} = \frac{h - (m+n)}{h}$

$$h = \frac{m^2(m+n)}{m^2 - n^2} = \frac{m^2}{m-n}$$

【Ⅲ】　二等辺三角形の高さｈをｍ（長軸の長さ）の関数とみて，これをｈ(ｍ)とすると，

$$h(m)=\frac{m^2}{m-n}$$

ｍで微分すると

$$h'(m)=\frac{2m(m-n)-m^2\times 1}{(m-n)^2}=\frac{m(m-2n)}{(m-n)^2}$$

$h'(m)=0$　とすると，　$m\neq 0$　だから　$m=2n$

$h(2n)=\dfrac{(2n)^2}{2n-n}=4n$　だから，増減表をつくると

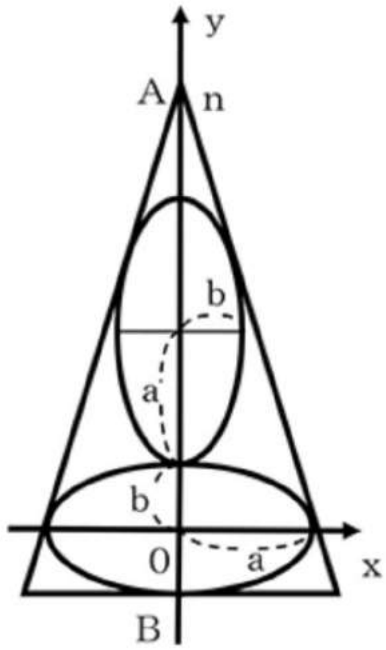
m	n	……	2n	……
h'(m)		−	0	＋
h(m)		↘	4n	↗

したがって，ｍ＝2ｎ のとき，ｈ(ｍ) の最小値は4ｎとなる。

(短軸の長さ)　＝　ｎ　＝　１寸　　であるから，
(長軸の長さ)　＝　ｍ　＝　2ｎ　＝　２寸　　のとき
(高さの最小値)　＝　4ｎ　＝　４寸　　となる。

答　４寸

【解答例2】



右図のように，下の楕円の長軸をｘ軸上，短軸をｙ軸上にとり，
長軸，短軸の長さを，それぞれ２ａ，２ｂ　（ａ＞ｂ＞０）　とする。
下の楕円，上の楕円の方程式は，それぞれ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{\{y-(a+b)\}^2}{a^2}=1 \quad \cdots\cdots②$$

となる。

②を変形して　$a^2x^2+b^2\{y-(a+b)\}^2=a^2b^2$　……③

下の楕円①の接線の方程式を　$y=mx+n$　……④

とすると，　楕円の接線の公式より　$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$　となるから

$$m^2=\frac{n^2-b^2}{a^2} \quad \cdots\cdots⑤$$

④を③に代入すると，　$a^2x^2+b^2[mx+\{n-(a+b)\}]^2-a^2b^2=0$

$$\left(a^2+b^2m^2\right)x^2+2b^2m\{n-(a+b)\}x+b^2\left[\{n-(a+b)\}^2-a^2\right]=0$$

③と④は接するから，　（判別式）＝０　より

$$\left[b^2m\{n-(a+b)\}\right]^2-\left(a^2+b^2m^2\right)\cdot b^2\left[\{n-(a+b)\}^2-a^2\right]=0$$

$$-a^2b^2\left[\{n-(a+b)\}^2-a^2\right]+a^2b^4m^2=0$$

ａ，ｂ≠０より　$m^2=\dfrac{\{n-(a+b)\}^2-a^2}{b^2}$　……⑥

⑤，⑥より　$\dfrac{n^2-b^2}{a^2}=\dfrac{\{n-(a+b)\}^2-a^2}{b^2}$

$$a^2\{n-(a+b)\}^2-a^4=b^2n^2-b^4$$

$$(a+b)(a-b)n^2-2a^2(a+b)n+a^2(a+b)^2-(a+b)(a-b)\left(a^2+b^2\right)=0$$

$$(a-b)n^2-2a^2n+a^2(a+b)-(a-b)\left(a^2+b^2\right)=0$$

$$(a-b)n^2-2a^2n+b\left(2a^2-ab+b^2\right)=0$$

$$\left\{(a-b)n-\left(2a^2-ab+b^2\right)\right\}(n-b)=0$$

$n-b\neq 0$，$a-b\neq 0$　より　$n=\dfrac{2a^2-ab+b^2}{a-b}$　……⑦

高さＡＢは，⑦を用いると，

$$AB = n+b = \frac{2a^2-ab+b^2}{a-b}+b = \frac{2a^2}{a-b}$$

高さＡＢを ｈ とおくと，　$h=\dfrac{2a^2}{a-b}$　……⑧

$2a^2 = h(a-b)$ $\qquad 2a^2 - ha + hb = 0$

aの実根条件より $\qquad h^2 - 8hb \geqq 0$

$\qquad h(h-8b) \geqq 0$

$b > 0$より $\qquad h \geqq 8b$

したがって，高さの最小値は　$h = 8b = 8 \times \frac{1}{2} = 4$　となる。

答　4寸

高さが最小となるときの　a　の値を求めると

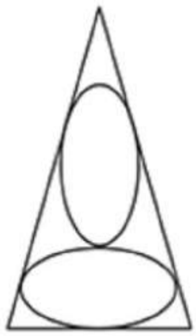
$8b = \frac{2a^2}{a-b}$ $\qquad 2a^2 - 8ab + 8b^2 = 0$ $\qquad (a-2b)^2 = 0$ $\qquad a = 2b = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

上級問題

上級問題は、岩手県一関市の白山神社に慶応２年(1866)に奉納された算額の問題をもとにしました。

この算額は、関流九伝の和算家、菅原勘五郎の門人７人が奉納したものです。菅原勘五郎は、現在の一関市滝沢の農家に文政４年(1821)に生まれ、はじめ隣家の菅原市左衛門に、その後一関の千葉胤英に学び、江戸の長谷川数学道場にも入門しています。多くの弟子を育て、門人たちに奉納させた算額が他にもあります。

上級問題は、１問めで、熊谷専治直久が作った問題です。



今有如図圭内容等側円二個、其側円短径一寸問
至極中勾幾何
答曰至極中勾四寸
術曰置短径四之得至極中勾合問
右　熊谷専治直久

《現代訳》

図のように、二等辺三角形の中に楕円が２個ある。短軸の長さ(短径)は１寸のとき、二等辺三角形の高さ(中勾)が最小となるときの高さはいくらか。

答え　中勾は４寸

術　短径を４倍すると問いに合う

算額の文面だけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、現代の解答と一致します。

和算における微分について

今回の上級問題の解答のひとつに、分数関数の微分を使用した解答者が多数いました。

和算家は、求積では、積分の方法について詳しく記載していますが、微分については不明確のようです。

和算には西洋数学の定義：微分係数は平均変化率の極限という

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$　　　の記載が見当たらない。

しかしながら和算では、関数の極大や極小を求める方法を「適尽法(てきじんほう)」と言う。「適尽」という言葉は「楊輝算法」に現れている。

和算の適尽法は関孝和に開始した。開方飜変(ほんぺん)（関孝和が著した算法七部書の一つ）の適尽法級法には

２次方程式　$a+bx+cx^2=0$に対し、$b+2cx=0$を作り、両式より x を消去すれば、$4a-b^2=0$　　を得る。「これを求めることを方級ｂを適尽するという」

さらに関孝和は多項式$f(x)$の微分$f'(x)$、二階微分$f''(x)$さらに高階微分には当たるものを諸級の数表（二項係数の表）を使用して求めることを記載している。

関孝和はニュートン近似などもあり、深い理論化と理解があったと思われる。しかし、和算家には理解が困難な内容であったようである。

千葉胤秀　算法新書　文政十三（１８３０）年の巻の三には適尽法が記載されている。

○　適尽諸級法　　適尽法を例一例二で２次方程式について説明し、更に、三乗方式極商を得る式

$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$　のとき$b+2cx+3dx^2+4ex^3=0$

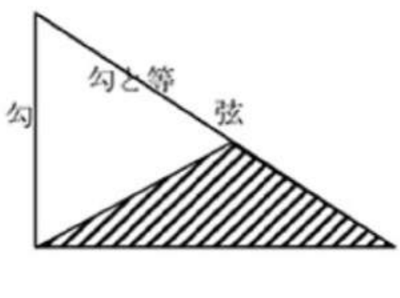
までが与えられ、次の適尽法級雑題（極大・極小の問題）がある。

問題

勾股の内へ図の如く黒積を容る有。

弦一寸黒積極数に至る勾何程と問。

答曰　勾四分三厘四毛二絲五忽有奇



$\dfrac{\text{勾}}{\dfrac{\text{勾玄差}}{\text{玄}}}$　天とす　$\underline{\text{玄巾}}\ \underline{\text{勾巾}}$　股冪とす　天冪を乗し　以下略

術曰　一十三個を平方にひらき内一個を減し余り弦を乗し是を六除して勾を得て間に合す

解答

答曰に続き、傍書法で解が説明されている。現代の微分の解と同様である。

勾＝xとおくと、4 黒積$^2 = y = x^2(1+x)(1-x)^3$ とおくと

$y' = 2x(1-x)^2\left(1-x-3x^2\right)$ で増減表により　$x = \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}$ が求まる。

また、無理関数の微分について、深川先生は参考文献で以下のように推測している。

$S(x) = 2x\sqrt{a^2-x^2} - 2x^2$　において、

$S'(t) = 0$　より　$a^2 - x^2 = 2x\sqrt{a^2-x^2}$　を解けばよい。

$S = 2x\sqrt{a^2-x^2} - 2x^2$　より　$\left(S+2x^2\right)^2 = 4x^2\left(a^2-x^2\right)$

これは　$S^2 + 4Sx^2 + 4x^4 = 4a^2x^2 - 4x^4$　これを微分して

$2SS' + 4\left(S'x^2 + 2Sx\right) + 16x^3 = 8a^2x - 16x^3$

この式で $S' = 0$ とおくと　$S = a^2 - 4x^2$　よって　$2x\sqrt{a^2-x^2} = a^2 - x^2$ が導かれる。

なお、微分ではないが、巻の四の招差法では、積 $S = \dfrac{30n^2-10n+36}{3n^2-n+35}$ という分数が現れている。

和算家は分数関数の微分なども、問題に応じて、柔軟な思考で対応して問題を解決していたことと思われる。今後、様々な文献を注意深く拝読したい。

稚拙な文章になりました。皆さまの御指導とご教授をお待ち申しあげます。

詳しくは、下記参考文献を熟読下さい。

参考文献

算法新書	千葉胤秀	文政十三（１８３０）年
和算ノ研究　方程式論	加藤平左エ門　佐々木力	２０１１年
関孝和論序説	上野健爾　小川束　小林龍彦　佐藤健一	２００８年
聖なる数学：算額	深川英俊　トニー・ロスマン	２０１０年