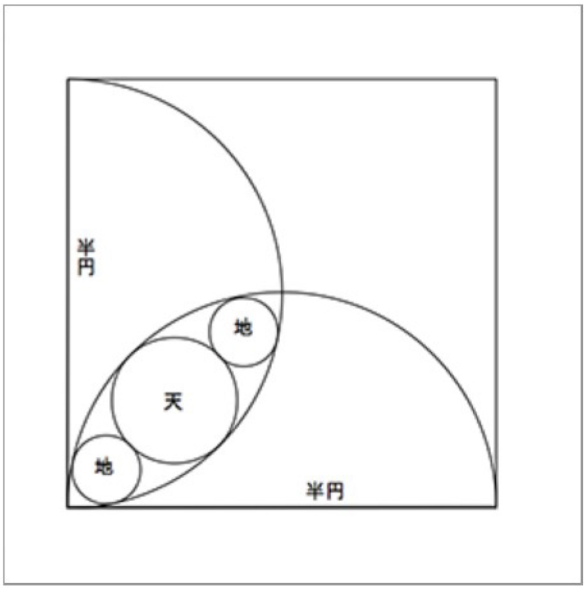
平成29年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県盛岡市の天満宮に文化4年（1807）に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありません。

正方形内に図のように、半円2個があります。
天円1個と地円2個が互いに外接しながら半円に内接しています。
正方形の1辺は8寸です。

（1）天円の直径を求めなさい。
（2）地円の直径を求めなさい。



○審査員講評

盛岡市の天満宮算額からの出題です。応募数は294通と例年に比べてやや物足りなく感じました。図の印象が複雑に見えたことがその要因かと思われます。

正方形や正五角形などの正多角形と円の組み合わせによる図形は美しく和算家が得意とした問題で、類似した問題は全国各地の算額等に見られます。

図の対象性と接円の接点と大円の中心を通る半径の関係が分かれば、三平方の定理と２次方程式を解くことで解決されます。

審査した上で気づいたことを以下にまとめました。

（１）天円の直径と地円の直径の両方が正解のとき、中級の正解とした。

（２）解法については、次の２点に集中した。

①図形の性質（２円が接することから三平方の定理）の利用。ほとんどがこの解答であった。

②座標を使用した解答。２名がこの方法を用いていた。

（３）提示された図形が相互にどのような関係かを検討した後に、解に取り掛かる人が少なかった。

①２円が接している、②直交している、の２点を自分で確認して欲しい。

（４）小学生２名から応募があったが、図形に関する予備知識が必要なので小学生には無理な問題であった。

（５）答は

①分母の有理化

②小数まで求めるか

判断に悩まれた方がいたようだ。２次方程式の段階で近似値を代入して、解いて近似値を示した方もいた。出題者が明示すべきと反省している。

（６）解答後の吟味まで記載した余裕のある方はすくなかった。

数学の問題は必要条件が正しく求まれば、十分条件を満たすことはほとんど明らかであるが、図形の問題では、吟味に触れてほしいものである。

終わりに

中級問題は、中学生にも解答可能な出題を心がけています。しかしながら、「和算の挑戦」の立場からどうしても初等幾何の性質や２次方程式の解法が必用になります。学校の進度によっては、解答が不可能な生徒もいるかと懸念しています。

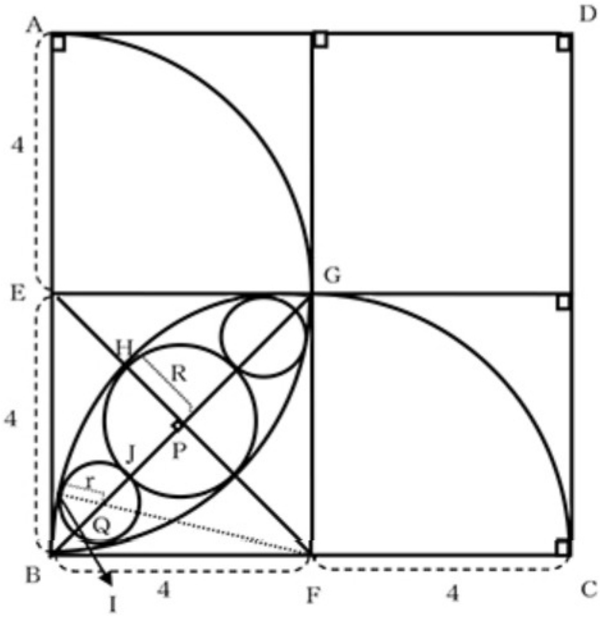
低学年の生徒は、中学校の先生方やご家族のアドバイスも必要かと思います。未知の公式を自分で学ぶとか周囲に尋ねるとかして、解答に挑戦して欲しいものです。

次回も岩手の算額からの出題を予定しています。

たくさんの投稿を祈念申し上げます。

○解答例

図のように，正方形ＡＢＣＤ内の２つの半円の中心をＥ，Ｆ，
２つの半円のＢ以外の交点をＧ，
天円Ｐ(Ｒ)，地円Ｑ(ｒ)と円Ｆの接点をそれぞれＨ，Ｉ，
天円Ｐと地円Ｑの接点をＪとする。



（１）正方形ＥＢＦＧの内部の図形は，直線ＥＦについて対称であるから，Ｅ，Ｆ，Ｐは共線である。
△ＢＰＦは，ＢＦを斜辺とする直角二等辺三角形であるから，

$$R = HF - PF = 4 - 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots①$$

したがて，

$$(\text{天円の直径}) = 2R = 8 - 4\sqrt{2}$$

（≒２．３４３１・・・・・）

答．$\left(8 - 4\sqrt{2}\right)$寸

（２）直角三角形ＦＰＱに三平方の定理を用いると，

$$PQ^2 + PF^2 = QF^2$$

$$(QJ + JP)^2 + PF^2 = (FI - QI)^2$$

$$(r + R)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = (4 - r)^2$$

$$\left\{r + \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\right\}^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = (4 - r)^2 \quad (①より)$$

$$(r + 4)^2 - 4\sqrt{2}(r + 4) + 8 + 8 = (r - 4)^2$$

$$16r - 4\sqrt{2}(r + 4) + 16 = 0$$

$$\left(4 - \sqrt{2}\right)r = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$r = \frac{4\left(\sqrt{2} - 1\right)}{4 - \sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(4 + \sqrt{2}\right)}{\left(4 - \sqrt{2}\right)\left(4 + \sqrt{2}\right)} = \frac{4\left(3\sqrt{2} - 2\right)}{14} = \frac{2\left(3\sqrt{2} - 2\right)}{7}$$

したがって，

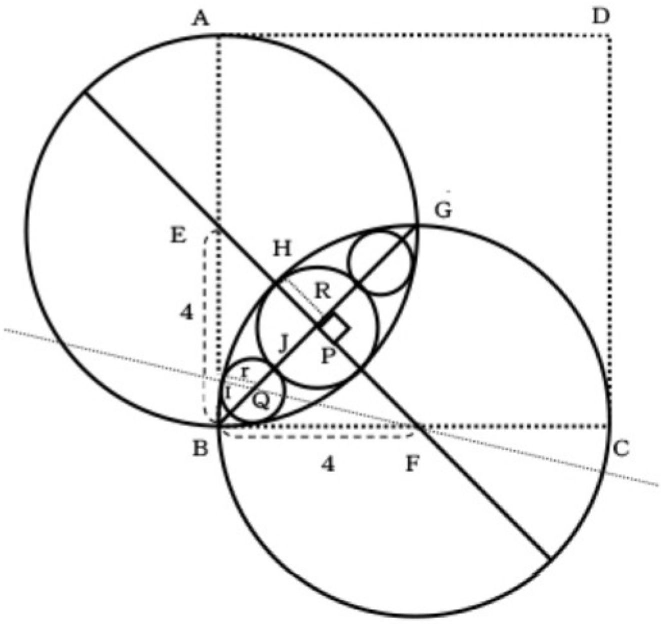
$$(\text{地円の直径}) = 2r = \frac{4\left(3\sqrt{2} - 2\right)}{7} = \frac{12\sqrt{2} - 8}{7}$$

（≒１．２８１５・・・・・）

答．$\dfrac{12\sqrt{2} - 8}{7}$寸

(参考)

E，F，P が共線になることは，右図の実線の図形の対称性からもわかります。

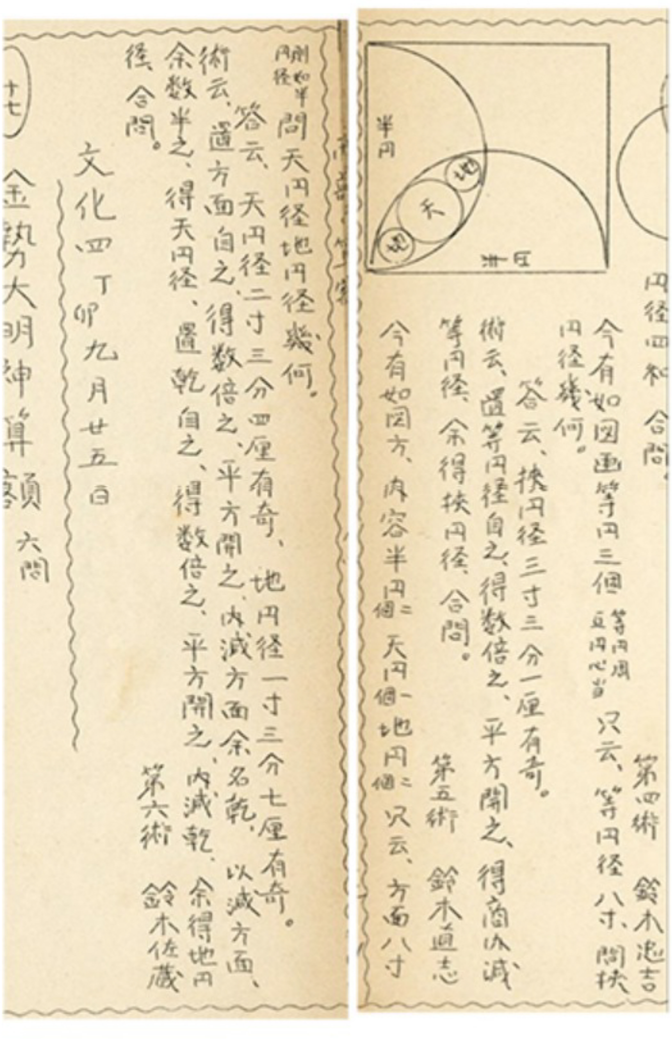


中級問題

中級問題は、岩手県盛岡市新庄町の天満宮に文化４年(1807)に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は現在は残っていませんが、『南部の算額』（平山諦・長瀬義本編、昭和 42 年)に、横川直胤編「神壁算法追加　上下」から採録したものとして掲載されています。これによると、この算額は、関流の和算家松岡嘉兵衛の門人６名が奉納したものです。算額の最初には、以下のように算額奉納の趣意が書かれています。

> 夫れ数は広大也、誠に人をして智を探し、才を表わす法有といへども問題変化にして答術も又感無量也、故に神力を得て此道を猶習学せん事を吾儕(ともがら)当社に祈願して広前に奉るものなり。

数学は広大なもので、人は智恵を絞り才能を表わそうとするが、問題は変化に富み答えを導く方法も計り知れなく大きい。だから神の力を得て数学を学ぼうとすることを我々は天満宮に祈願して、算額を奉納するという意味です。



この問題は、その第６術で、鈴木佐蔵によるものです。

《現代訳》

今、図のように正方形の中に半円２個、天円１個、地円２個がある。正方形の１辺(半円径)が８寸の時、天円径、地円径はいくらか。

答えて曰く

天円の直径は、２寸３分４厘・・・、地円の直径は１寸３分７・・・

術に曰く

正方形の１辺８寸を置いて自乗し、これを２倍する。さらにこれを平方に開く。ここから正方形の１辺８寸を減じた余りを乾とする。正方形の１辺８寸から乾を減じた余りを半分にして天円の直径を得る。乾を置いて自乗し、倍にして平方に開く、乾を減じ地円を得る。

「術」の部分を現代風にすると

正方形の１辺８寸を置いて自乗し、これを２倍する。　$8^2 \times 2$

さらにこれを平方に開き　$\sqrt{8^2 \times 2} = 8\sqrt{2}$

正方形の１辺８寸を減じた余りを乾とする。　$8\sqrt{2} - 8$　・・・乾

乾で８寸を引き半分にして天円の直径を得る。

$$\frac{8\ -\text{乾}}{2} = \frac{8 - \left(8\sqrt{2} - 8\right)}{2} = 8 - 4\sqrt{2} = \text{天円} = 2.34\cdots$$

乾を自乗し２倍する　$\text{乾}^2 \times 2 = \left(8\sqrt{2} - 8\right)^2 \times 2$

これを平方に開き、乾を引き、地円の直径を得る

$$\sqrt{2\left(8\sqrt{2} - 8\right)^2} - \left(8\sqrt{2} - 8\right) = \text{地円} = 1.37\cdots$$

天円の直径は現代解とも合いますが、地円径は、答えが合わず誤りのよ

のものが誤っているのか、書き写した際に誤ったのかは不明です。