# 平成30年度出題問題③［上級問題］(高校生・一般向き)

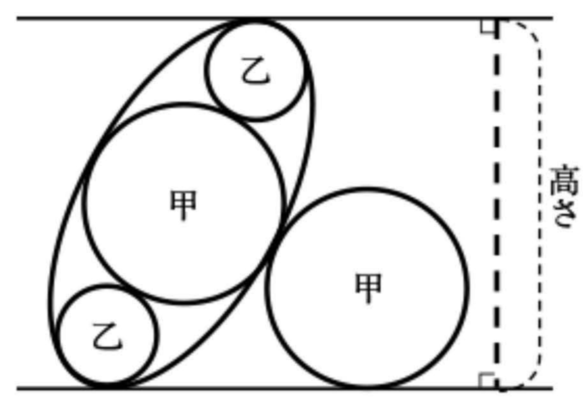
・岩手県一関市の観音寺に弘化4年(1847)に奉納された算額の問題をもとにしました。

2つの甲円の直径と楕円の短軸の長さは等しく、楕円と2つの甲円は1点で接しています。

乙円は楕円の長軸の端点における曲率円で、楕円内の甲円と外接しています。

楕円の接線は、楕円と甲円の共通接線に平行です。

平行線の距離（高さ）を乙円の直径を用いて表しなさい。




## 審査員講評

一関市博物館から東へ３kmほどのところ，東北自動車道一関 IC の近くにある赤荻観音寺に奉納された現存算額をもとにした問題です。当地周辺の算額（現存または文献・記録）には，楕円の問題が多数あります。

上級問題の応募数は１１５件，正答は８８件で，正答率はやや低くなりました。年代別の割合でみると，例年の傾向ですが，２０～４０歳代が少なく，５０代以上が多い結果となりました。

感想の中には，「曲率円についてインターネットで調べた。」「曲率円を幾何的にとらえる方法が思いつかず，解析的なアプローチを中心に解答してみた。」とありました。現代では、曲線の「曲率、曲率円、曲率半径」などは大学初年級の微分積分で履修しますが、和算でも曲率円は扱われ、算法助術〔長谷川善左衛門弘閲　山本安之進賀前編　天保 12 年（1841 年）〕八十六では、楕円の長軸の端点での曲率円の直径を「極小径」、楕円の短軸の端点での曲率円の直径を「極大径」といっています。観音寺の算額では「至極乙円」となっています。

寄せられた解答は、曲率半径を求めるために、次の方法をとっていました。

①判別式を用いる。

②曲率半径を求める公式 $\dfrac{\left[1+\left(f'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''}$ を用いる。

③円柱に内接する球を斜断する方法を用いる。（この方法による解答は少ない）

誤答としては、乙円径の無理数倍となるものがみられました。

楕円の長軸、短軸の端点での曲率円についての参考文献として、

- 『鹽竈神社　算額解義』監修：土倉　保（東北大学名誉教授）、編集：菅原　通、H26 発行
- 『新解説・和算公式集 算法助術』土倉保編著、朝倉書店、H26 発行

などがありますのでご覧下さい。

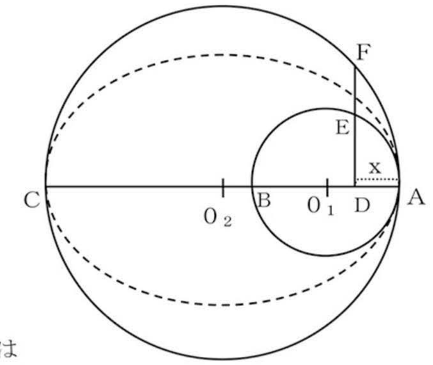
今年度は、昨年度同様楕円についての問題でした。「１２月１日が近づくと気持ちがワクワク、ソワソワしてしまう。なんでこんなに待ち遠しいのだろう。」「この時代の数学者がどのようにして問題を解くか、とても興味があります。まだ一関市博物館に行ったことがないので、ぜひ機会をみつけて行きたいと思います。」と感想を書いていただいた方もいました。できるだけ多くの方々が和算文化にふれることができるよう、岩手県や一関市に縁のある和算問題を提供していきたいと思います。挑戦者の素晴らしい解答は解答例に載せさせて頂きました。毎回賞の選定には苦慮しますが、なるべく未受賞者で、簡潔で明快に解法が展開されているものを選定させていただきました。寄せられた答案から、挑戦者のファイトを感じながら審査をさせていただきました。皆様とともに勉強すべく更に努力してまいりますので今後ともよろしくお願いいたします。

## 解答例

［補助定理１］

長軸の長さ２ａ，短軸の長さ２ｂの楕円の長軸の端点での曲率半径をｒとすると，　$r=\dfrac{b^2}{a}$

［証明］




右図のように，円$O_1$(ｒ) が 円$O_2$(R) に点Aで内接しているとする。このとき $0<\alpha<1$ として円$O_2$ を直線$O_1O_2$ の両側垂直方向にα倍すると，楕円ができ，中心は$O_2$，長軸の長さは２R，短軸は２αRである。

円$O_1$の直径ＡＢ上の任意の点Dをとって，$\overline{AD}=x$ とする。

Dを通り直線ＡＢと垂直な直線が円$O_1$，$O_2$の円周と交わる点を図のように順にE，Ｆとする。このとき，方巾の定理より

$\overline{DE}^2=\overline{AD}\cdot\overline{DB}=x(2r-x)$

$\overline{DF}^2=\overline{AD}\cdot\overline{DC}=x(2R-x)$

であるから，上述のα倍してできる楕円が$O_1$の内部に入る部分がない条件は

$\alpha\overline{DF}\geqq\overline{DE}$　すなわち　$\alpha\sqrt{x(2R-x)}\geqq\sqrt{x(2r-x)}$

がすべてのｘ（$0\leqq x\leqq 2r$）　について成立することである。

平方して整理すれば，　$(\alpha^2-1)x+2r-2\alpha^2R\leqq 0$

がすべてのｘ　（ $0\leqq x\leqq 2r$ ）で成立するといってよい。

$\alpha^2-1<0$　だから　$\alpha^2R\geqq r$　が成り立つことが必要十分条件である。

したがって，αのとりうる最小値を改めてαとすれば

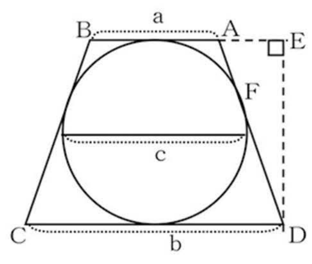
$\alpha^2R=r$

得られる楕円$O_2$(R，αR)を改めて$O_2$(ａ，ｂ)と書くことにすれば，上式は $(\alpha R)^2=rR$　と書き直せるから　$b^2$

$=ra$

すなわち　$r=\dfrac{b^2}{a}$

［補助定理２］




右図のように，上底ａ，下底ｂの等脚台形ＡＢＣＤに直径ｃの円が内接しているとき

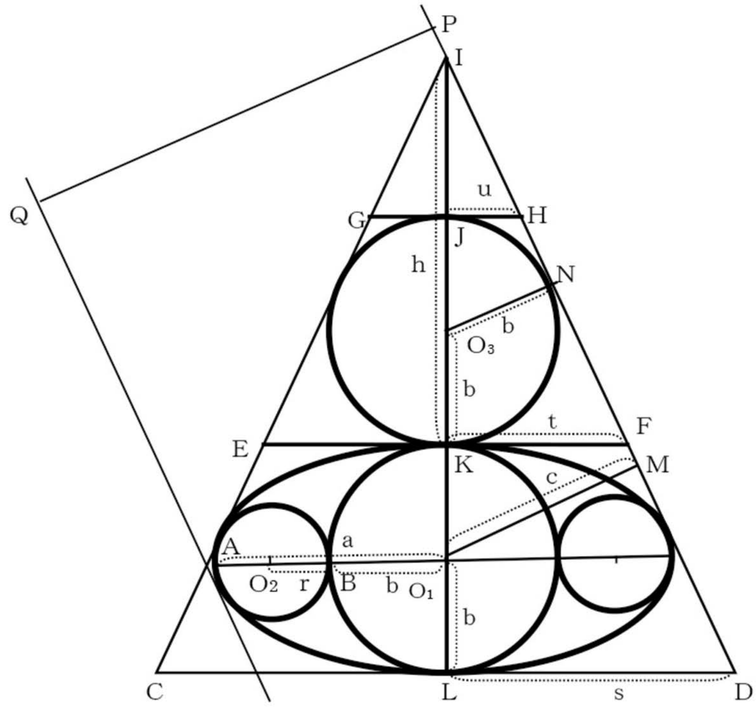
$c^2=ab$

［証明］

辺ＡＤと円の接点をＦとすると　　$AD=AF+DF=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}$

Ｄから直線ＡＢへの垂線の足をＥとすると　　$AE=\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}$

直角三角形ＡＤＥに，三平方の定理を用いると　$c^2=ED^2=AD^2-AE^2=\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^2=ab$




楕円の長軸，短軸の長さをそれぞれ ２a，２ｂ とすると，甲円の直径は２ｂとなる。乙円の直径を２ｒとする。

**【補助定理１】**より　$r=\dfrac{b^2}{a}$　・・・・・①

$O_1B=O_1A-AB$　より　$b=a-2r$　・・・・・②

②を①に代入すると　$r=\dfrac{(a-2r)^2}{a}$

$a^2-5ar+4r^2=0$

$(a-r)(a-4r)=0$

$a\neq r$ より　$a=4r$　・・・・・③

③を②に代入すると　$b=2r$　・・・・・④

③④より　$a=2b$　・・・・・⑤

⑤より，等脚台形ＥＣＤＦとそれに内接する楕円$O_1$を縦方向に２倍すれば，上底，下底はそれぞれ２ｔ，２ｓのままで，内接円の直径は２ａ（＝８ｒ）となる。このことから，**【補助定理２】**を用いれば，

$(8r)^2=2s\cdot 2t$　よって，　$st=16r^2$・・・・・⑥

等脚台形ＧＥＦＨの上底，下底がそれぞれ２ｕ，２ｔであり，それに内接する円$O_3$の直径は２ｂ（＝４ｒ）であるから，**【補助定理２】**を用いれば，

$(4r)^2=2u\cdot 2t$　よって，　$tu=4r^2$　・・・・・⑦

⑥⑦を用いると　$\dfrac{u}{s}=\dfrac{tu}{st}=\dfrac{4r^2}{16r^2}=\dfrac{1}{4}$　・・・・・⑧

△ＩＪＨ∽△ＩＬＤより

$$\frac{u}{2}:\frac{s}{2}=(h-2b):(h+2b)=(h-4r):(h+4r) \qquad (\because ④)$$

$$\frac{u}{s}=\frac{h-4r}{h+4r} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧⑨より $\dfrac{h-4r}{h+4r}=\dfrac{1}{4}$

$$h=\frac{20}{3}r \qquad \cdots\cdots ⑩$$

$\triangle IO_3N \backsim \triangle IO_1M$，④⑩より，

$$\frac{b}{c}=\frac{h-b}{h+b}=\frac{h-2r}{h+2r}=\frac{\frac{20}{3}r-2r}{\frac{20}{3}r+2r}=\frac{7}{13}$$

これより

$$c=\frac{13}{7}b=\frac{13}{7}\times 2r \qquad (\because ④)$$

高さ$=PQ=2c=2\times\dfrac{13}{7}\times 2r=\dfrac{26}{7}\times 2r=\dfrac{26}{7}\times$(乙円の直径)

**答.** $\dfrac{26}{7}\times$**(乙円の直径)**

---

**参考 ： 補助定理１の別証明Ｉ**

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ を $x=a\cos t$， $y=b\sin t$ と媒介変数表示すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dt}{dx}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\left(-\frac{b}{a}\mathrm{cosec}^2 t\right)\Big/(-a\sin t)=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

$$(\text{曲率})=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}\Big/\left\{1+\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)^2\right\}^{3/2}=-\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}=-\frac{a^4b^4}{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}$$

$$(\text{曲率半径})=-\frac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}$$ （曲率，曲率半径は一般に絶対値をとる）

長軸の端での曲率半径は，$x=\pm a$，$y=0$ とすればよいから，

$$\textbf{(長軸の端での曲率半径)}=\frac{b^2}{a}$$

**参考　：　補助定理１の別証明　Ⅱ**

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=\pm\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad \cdots\cdots ②$$

①を微分すると

$$2b^2x+2a^2yy'=0$$

$$b^2x+a^2yy'=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{b^2x}{a^2\times\left(\pm\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)}=\mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$y'^2=\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)} \qquad \cdots\cdots ④$$

③を微分する。

$$b^2+a^2\left(y'^2+yy''\right)=0$$

第２次導関数　$y''=-\dfrac{b^2+a^2y'^2}{a^2y}=-\dfrac{b^2+a^2\times\dfrac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}{a^2\times\left(\pm\dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)}$　(∵②④)

$$=-\frac{b^2+\dfrac{b^2x^2}{a^2-x^2}}{a\times\left(\pm b\sqrt{a^2-x^2}\right)}=\mp\frac{a^2b^2}{ab\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

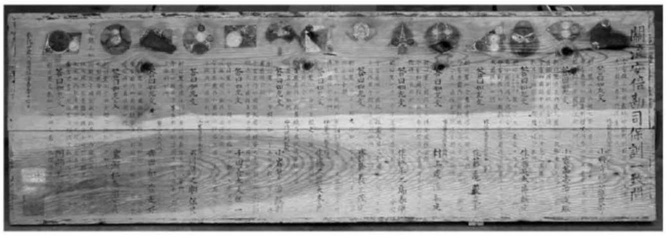
$$\therefore\quad y''=\mp\frac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$1+y'^2=1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}=\frac{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)} \qquad \cdots\cdot ⑥$$

$$(\text{曲率半径})=\frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{\left\{\dfrac{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\mp\dfrac{ab}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|}=\frac{\left\{a^4-\left(a^2-b^2\right)x^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

長軸の端点での曲率半径は　$x=a$ とすると　$\dfrac{b^2}{a}$

# 上級問題

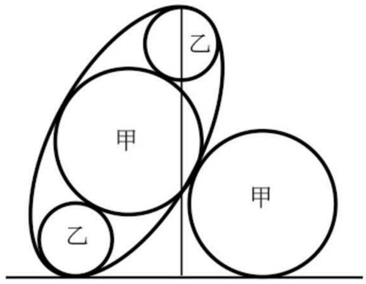


弘化４年奉納　観音寺算額　61×188 ㎝

上級問題は、岩手県一関市の正慶山観音寺に弘化 4 年(1847)に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、地元赤荻村の関流八伝の和算家、安倍（阿部）勘司の校閲により、周辺の人々１４人が奉納したものです。

安倍勘司の父、貞治は、千葉胤秀の高弟で天文学にも通じ、門人も多く育てています。また天保の飢饉の際には仙台藩に私財を提供し、その功績で士分に取り立てられています。長男も和算を学び、次男はこの算額が奉納された観音寺の僧、三男が勘司で、四男は医者になったといいます。勘司は、父と同様、江戸の長谷川門下に入り、そのまま江戸にとどまり大島姓を名乗りました。また九州や山梨など各地を遊歴して和算の教授にあたっています。貞治・勘司親子は、長谷川道場から最高位の免許である別伝を受けています。

上級問題は、１問めで、小野寺悦蔵良秀が作った問題です。




今有線上如図載以甲円挟側円周容至極乙円二个
其乙円径若干問得高術如何
答曰如左文
佐藤長蔵直勝門人　小野寺悦蔵良秀
術曰置二十六個七除之乗乙円径得高合問

**《現代訳》**

今、図のように、線の上に甲円が側円（楕円）を挟み、乙円２個が極に至って周に容れる※。乙円の直径が若干とするとき、高さはいくらになるか。

※「極に至って周に容れる」は、乙円が側円に１点で接する、曲率円のことを示している。

答え　左の文の如し

術　26 個を置き 7 で除し乙円径を乗ずれば高さに合う

算額の文面だけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、術の文を現代の数式で表すと

$$\frac{26}{7}\times 乙円径 = 高$$

となり、
現代の解答と一致します。