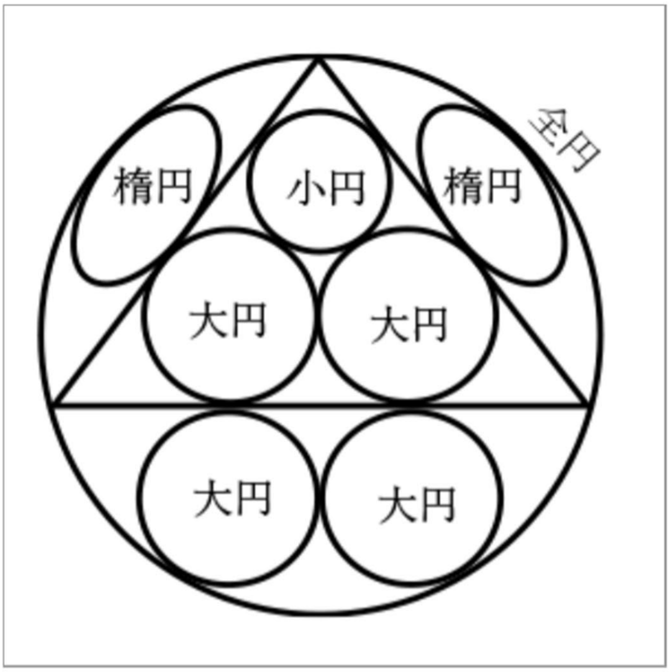
令和元年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・岩手県一関市の春日神社に弘化4年（1847）に奉納された算額の問題をもとにしました。

全円の周上に頂点をもつ二等辺三角形の内部に、互いに外接する小円と2つの大円があり、図のように、等辺と底辺にも接しています。
二等辺三角形の外部にある2つの大円は底辺に接し，2つの楕円は等辺に中点で接し、それぞれ全円に内接しています。
全円が楕円の短軸の端点における曲率円のとき、楕円の長軸の長さを、小円の直径を用いて表しなさい。

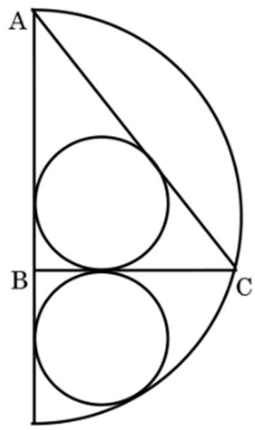


○審査員講評

上級問題は、一関市萩荘の春日神社算額（現存）第三問をもとに作問しました。同額第一問は平成１６年度「和算に挑戦」で出題しています。両問とも楕円に関するものです。昨年度は「長軸の端点での曲率円」、今年度は「短軸の端点での曲率円」を扱っています。これらの曲率円については、和算の公式集「算法助術」の八十六番にもあります。同算額の原文では、「極側円」となっており、これが「短軸の端点での曲率円」を意味しています。一関市、岩手県の算額には、曲率円の問題が多数あります。

上級問題の応募者数、応募数は例年より少なく、正答率も低い傾向となりました（応募者数５４、応募数５８、正解数４４、正答率７５．９%）。年代別の割合でみると、例年の傾向ですが、２０～４０歳代が少なく、５０代以上が多い結果となりました。

右図の BC、AB、CA は、それぞれ大円の半径の３倍、４倍、５倍になりますが、正解者の方々の多くは、この関係をきちんと捉えていました。三平方の定理、外接する２円の共通接線の長さの和算公式、方べきの定理、相似比、三角形の面積、内接円の関係などを駆使してこの関係を導いていました。
∠C＝２θ として、三角関数を使った解答もあり、いろいろな着想や工夫に富んだ解答がみられ、楽しく審査させていただきました。
感想文に、「計算途中で分かった全円に内接する二等辺三角形を中央で２分すると３：４：５の直角三角形になるには驚きました。」と記されていました。



和算家は楕円の曲率円の公式を既知としていましたが、解答者の方々の多くは、この公式を微分などを用いてきちんと導いている解答もみられました。感想文に、「曲率円については、昨年度の上級問題の長軸の端点における曲率円を応用させてもらいました」との記入がありました。曲率円についての参考文献としては「新解説・和算公式集 算法助術　土倉保編著　朝倉書店」などがあります。

解答の方針としては、円から攻めるか、楕円から攻めるかに分けられました。惜しくも最後のところの代入計算のミスがある解答もありました。１８回目となった今年度の問題は、過去の「和算に挑戦」解答集や、一関市博物館ホームページが参考になる、あるいはヒントになるとの感想が多くみられました。

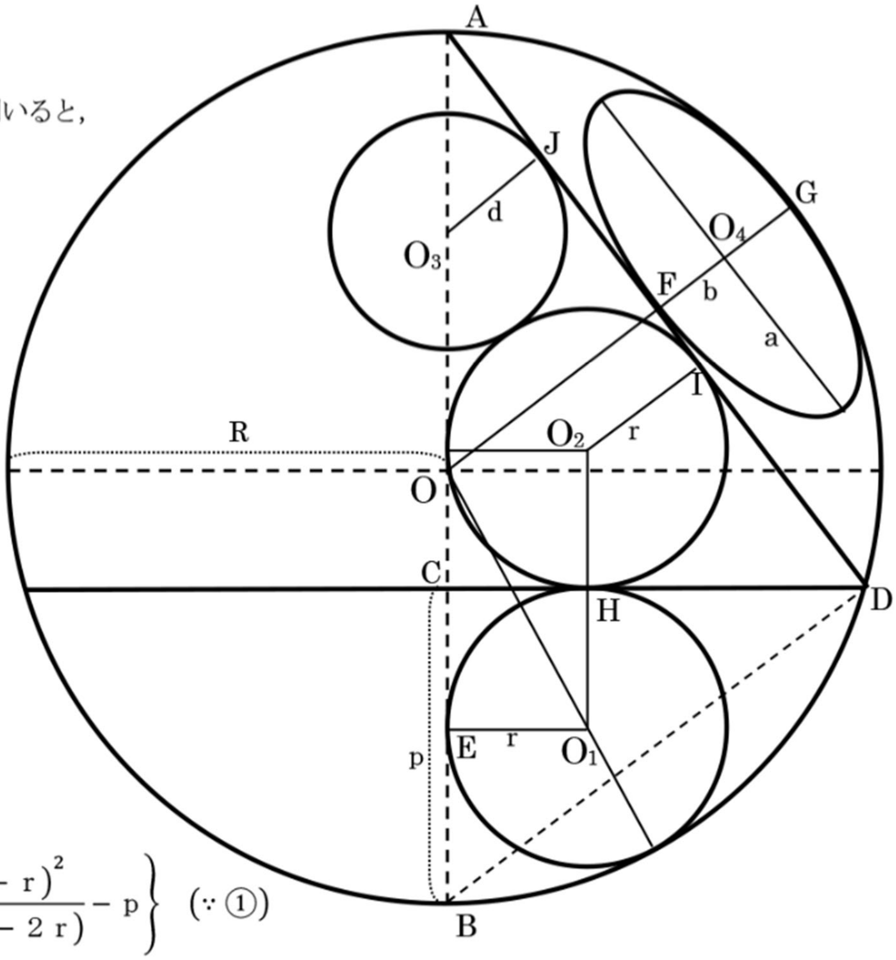
今年度は、３年連続の楕円についての問題でした。「私の体力も徐々に衰えており、上級問題が解けないときは、来年はもう止めようかと思うこともありますが、解けるとまた来年も頑張ろうという気になります。ボケ防止にもなるのでもう少し続けたい。」と、８０代の方の感想もありました。今後も、できるだけ多くの方々が和算文化にふれることができるよう、岩手県や一関市に縁のある和算問題を提供していきたいと思います。

たくさんの正解、そして優劣つけがたい正解の中から、賞に該当するものを選定することは、難しく、毎回のようにすばらしい解答を提出してくださる方々には大変心苦しいのですが、受賞歴のない方にも可能なかぎり道を広げました。皆様の解答に寄せる熱気を感じながら、審査をさせていただきました。皆様とともに勉強すべく更に努力してまいりますので今後ともよろしくお願いいたします。

○解答例

【解答例】

図のように，全円 O(R)，大円 O_1(r)，大円 O_2(r)，小円 O_3(d)，楕円 O_4(a，b)とし，BC ＝p とする。



Ⅰ．p，Rを，rを用いて表す

直角三角形 OE O_1 に三平方の定理を用いると，

$$OE^2+EO_1{}^2=OO_1{}^2$$

$$(R-p+r)^2+r^2=(R-r)^2$$

$$2(p-2r)R=(p-r)^2$$

p＞2ｒだから

$$R=\frac{(p-r)^2}{2(p-2r)} \quad \cdots①$$

直角三角形ADB ∽ 直角三角形ACD
より，AD : AB＝AC : AD

$$AD^2=AB\times AC$$

$$=2R\times(2R-p)$$

$$=2\times\frac{(p-r)^2}{2(p-2r)}\times\left\{2\times\frac{(p-r)^2}{2(p-2r)}-p\right\} \quad (\because ①)$$

$$=\frac{r^2(p-r)^2}{(p-2r)^2}$$

$$AD=\frac{r(p-r)}{p-2r} \quad (\because p>r,\ p>2r) \quad \cdots\cdots②$$

直角三角形ACDの内接円の半径がｒであるから

$AC+CD-AD=2r$

$AC+\sqrt{AC\times BC}-AD=2r$

②を用いると　$(2R-p)+\sqrt{(2R-p)p-\dfrac{r(p-r)}{p-2r}}=2r$

①を用いると　$\left(\dfrac{(p-r)^2}{(p-2r)}-p\right)+\sqrt{\left(\dfrac{(p-r)^2}{(p-2r)}-p\right)p-\dfrac{r(p-r)}{p-2r}}=2r$

$$\frac{r^2}{p-2r}+\sqrt{\frac{pr^2}{p-2r}-\frac{r(p-r)}{p-2r}}=2r$$

$$\sqrt{\frac{p}{p-2r}}=3$$

$\boxed{p=\dfrac{9}{4}r}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・③

③を①に代入すると　$\boxed{R=\dfrac{\left(\dfrac{9}{4}r-r\right)^2}{2\left(\dfrac{9}{4}r-2r\right)}=\dfrac{25}{8}r}$ ・・・・・・・・・・・・④

Ⅰ．AC，CD，ADを，ｒを用いて表す

したがって，③④より　$\boxed{AC=2R-p=2\times\dfrac{25}{8}r-\dfrac{9}{4}r=4r}$ ・・・・・⑤

③④より，　$\boxed{CD=\sqrt{AC\times BC}=\sqrt{4r\times\dfrac{9}{4}r}=3r}$ ・・・・・⑥

②③より　$\boxed{AD=\dfrac{r\left(\dfrac{9}{4}r-r\right)}{\dfrac{9}{4}r-2r}=5r}$ ・・・・・⑦

したがって，⑤⑥⑦より，△ACDは CD：AC：AD＝３：４：５ の直角三角形となる。（★）

Ⅰ．a，bを，ｒを用いて表す

★を用いれば，△AFO ∽ △ACD より，　OF：AO＝３：５，　$OF:\dfrac{25}{8}r=3:5$　（∵④）

$OF=\dfrac{15}{8}r$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・⑧

したがって，④⑧より，　$2b=FG=OG-OF=R-\dfrac{15}{8}r=\dfrac{25}{8}r-\dfrac{15}{8}r=\dfrac{5}{4}r$

よって　$\boxed{b=\dfrac{5}{8}r}$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・⑨

全円O(R)は，楕円O_4(a , b)の短軸の端での曲率円であるから，④⑨より

$$a^2=bR=\frac{5}{8}r\times\frac{25}{8}r=\frac{125}{64}r^2 \qquad (※a^2=bR\text{　の証明は後述})$$

$$\boxed{a=\frac{5\sqrt{5}}{8}r}$$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑩

Ｉ．2aを，２dを用いて表す

$O_3J:AJ=3:4$　より，

$$O_3J:AJ=O_3J:(AD-DI-IJ)=O_3J:(AD-DH-IJ)=d:\left(5r-2r-2\sqrt{dr}\right)$$

$$=d:\left(3r-2\sqrt{dr}\right)=3:4$$

よって　$9\left(\sqrt{r}\right)^2-6\sqrt{d}\sqrt{r}-4d=0$

$$\sqrt{r}=\frac{3\sqrt{d}+\sqrt{\left(3\sqrt{d}\right)^2+9\times4d}}{9}=\frac{3\sqrt{d}+3\sqrt{5d}}{9}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{d}}{3} \qquad \left(\because\sqrt{d}>0\right)$$

$$r=\left\{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{d}}{3}\right\}^2=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9}d$$ ・・・・・・・・・・・・・・⑪

⑪を⑩に代入すると，

$$a=\frac{5\sqrt{5}}{8}\times\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9}d=\frac{15\sqrt{5}+25}{36}d$$

$$2a=\frac{15\sqrt{5}+25}{36}\times2d$$

したがって，　**$(\text{楕円の長軸の長さ})=\dfrac{15\sqrt{5}+25}{36}\times(\text{小円の直径})$** ・・・・・・**答**

長軸の長さ２ａ，短軸の長さ２ｂの楕円の短軸の端点での曲率半径をＲとすると，$a^2 = bR$ の証明

［証明］

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ を $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$ と媒介変数表示すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dt}{dx}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt}=-\left(-\frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2 t\right)\Big/(-a\sin t)=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

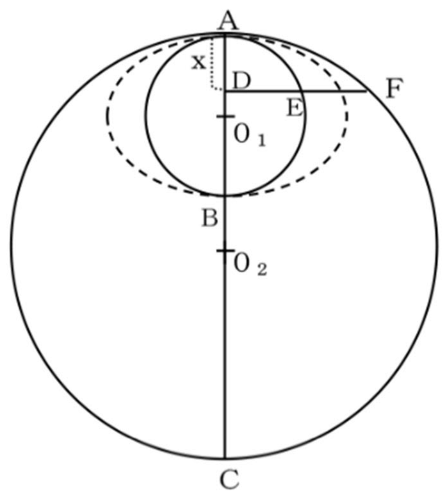
$$(\text{曲率})=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}\Big/\left\{1+\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)^2\right\}^{3/2}=-\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}=-\frac{a^4b^4}{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}$$

$$(\text{曲率半径})=-\frac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}$$ （曲率，曲率半径は一般に絶対値をとる）

短軸の端点での曲率半径は，$x=0,\ y=\pm b$ とすればよいから，

$(\text{短軸の端での曲率半径 } R)=\dfrac{a^2}{b}$ よって $\mathbf{a^2=b\,R}$

［別証明］



右図のように，円$O_1(r)$ が 円$O_2(R)$ に点Ａで内接しているとする。このとき$\alpha>1$として円O_1 を直線O_1O_2 の両側垂直方向にα倍すると，楕円ができ，中心はO_1，長軸の長さは$2\alpha r$，短軸は$2r$である。

円O_1の直径ＡＢ上の任意の点Ｄをとって，$\overline{AD}=x$ とする。

Ｄを通り直線ＡＢと垂直な直線が円O_1，O_2の円周と交わる点を図のように順にＥ，Ｆとする。このとき，方巾の定理より

$$\overline{DE}^2=\overline{AD}\cdot\overline{DB}=x(2r-x)$$

$$\overline{DF}^2=\overline{AD}\cdot\overline{DC}=x(2R-x)$$

であるから，上述のα倍してできる楕円がO_2の外に出ないない条件は

$\alpha\cdot\overline{DE}\leqq\overline{DF}$ すなわち $\alpha\sqrt{x(2r-x)}\leqq\sqrt{x(2R-x)}$

がすべてのx $(0\leqq x\leqq 2r)$ について成立することである。

平方して整理すれば，$0\leqq\left(\alpha^2-1\right)x+2R-2\alpha^2 r$

がすべてのx $(0\leqq x\leqq 2r)$ で成立するといってよい。
$\alpha^2-1>0$ だから $\alpha^2 r\leqq R$ が成り立つことが必要十分条件である。
したがって，αのとりうる最大値を改めてαとすれば
$\alpha^2 r=R$
得られる楕円O_1（αr，r）を改めて$O_1(a,\ b)$と書くことにすれば，上式は$(\alpha r)^2=Rr$ と書き直せるから

$a^2=Rb$

すなわち $R=\dfrac{a^2}{b}$

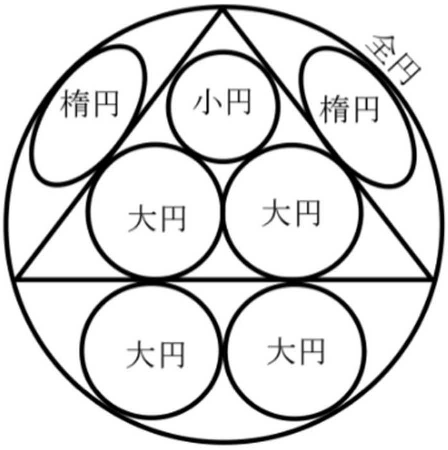
上級問題

上級問題は、岩手県一関市萩荘の春日神社に弘化４年(1847) ３月 15 日に、関流千葉治三郎門人によって奉納された算額の問題をもとにしました。この算額には、３題の問題がありますが、上級問題は３題目の石川伝之助保良によるものです。

弘化４年奉納 春日神社算額　33×82. 5㎝

石川伝之助は文化 10 年(1813)生まれなので、この時 34 歳です。この他に平泉中尊寺の阿弥陀堂や奥州市、一関市の神社仏閣にも算額を奉納しています。伝之助は、孫の幸平にも和算を教え、幸平はやがて一関周辺の和算家のリーダー的存在となります。幸平は、千葉胤秀の孫千葉六郎にも師事し、六郎没後の昭和６年(1931)に関流数学交友会を設立して会長として和算の研究と普及に尽力しました。一関を離れた千葉家から和算書などを受け継いでいますが、その中に和算の祖・関孝和の肖像画も含まれていました。この写真は、石川幸平とその子、孫の３代が関孝和の肖像画の前で撮影したものです。関孝和の肖像画は、子孫から一関市博物館に寄贈されました。

関孝和の肖像画の前での記念写真
石川伝之助の孫石川幸平を中心に
大正 12 年頃



今有全円内如図設圭容円及等極側円小円径若
干問長径術如何
答曰如左文
術曰置一千一百二十五個開平方加二十五個三
十六除之乗小円径得長径合問

《現代訳》

今、図のように、全円内に二等辺三角形を設けて円及び極側円(楕円)を容れる。小円径(直径)を若干とするとき、楕円の長径(長軸)はどのようにして求めるか。

答え　左の文の如し

術　1125 個を置き平方に開いて 25 を加え、36 で割り小円径をかければ長径となり問いに合う

算額の文面だけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、術の文を現代の数式で表すと

$$\frac{\sqrt{1125}+25}{36}\times \text{小円径} = \text{長径}$$

となり、
現代の解答と一致します。