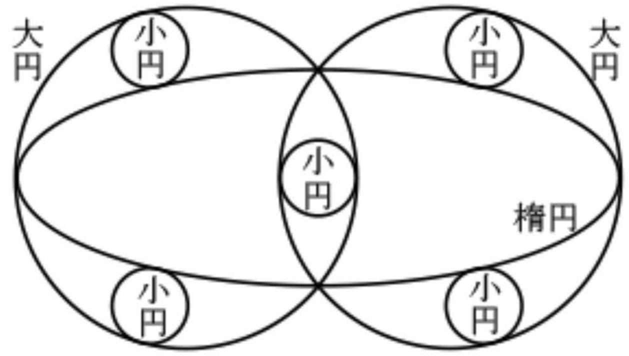
令和2年度出題問題③［上級問題］(高校生・一般向き)

・岩手県一関市の保呂羽神社に明治7年(1874)に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありません。

2個の大円の交点を通る楕円が長軸の端点で、大円と接しています。5個の小円は大円に内接しています。

中央の小円の中心は、楕円の中心に一致しています。4個の小円は楕円に外接し、その接点は、小円の中心と大円の中心を結ぶ直線上にあります。

小円の直径が2寸のとき、大円の直径を求めなさい。



審査員講評

上級問題は、一関市の保呂羽神社に明治時代に掲額された算額（非現存、記録）の問題をもとにアレンジしました。原文には、「その接点は、小円の中心と大円の中心を結ぶ直線上にあります。」という条件は記されていません。この条件をつけないとより難問になります。このことに言及してくれた方が３名いました。

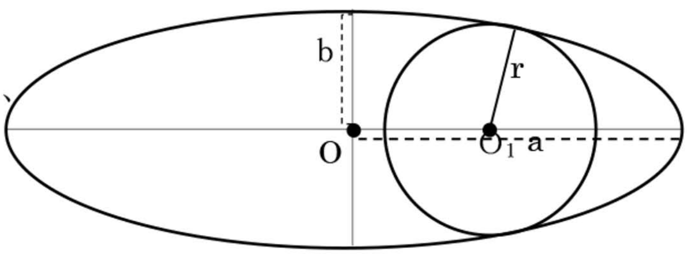
また、この上級問題と類似の問題が『千葉県の算額』にあります。本誌の和算編〈上級問題〉をご覧ください。

上級問題の応募者数、応募数は昨年度よりかなり増加し、正解率も高くなりました。一人で３通りの解答を提出してくれた方もいました。年代別の割合でみると、例年の傾向ですが、２０～４０歳代が少なく、５０代以上が多い結果となりました。中学生の応募もあり、正解に審査員も驚かせられました。

長軸、短軸の長さがそれぞれ２a、２b の楕円 O に２点で内接する円をO_1(r)とすると、

$$\mathbf{OO_1} = \frac{\sqrt{(\mathbf{a^2 - b^2})(\mathbf{b^2 - r^2})}}{\mathbf{b}}$$

となりますが、



この事柄を既知としたり、きちんと導いた方が多く見られました。これは、算法助術 84 番（楕円に内接する円の公式）と同じ内容になります。　参照：『新解説・和算公式集　算法助術　編著　土倉 保　朝倉書店』

円柱の斜断による和算流の解法もありましたが、(判別式) ＝０ を用いた現代流の解法が多くみられました。主に次のような内容、方法の組み合わせを用いて解いていました。

・三平方の定理　・微分　・補助円　・接線、法線の方程式　・楕円を円にアファイン変換

・接線の方向ベクトル　・円や楕円の (x_1, y_1) での接線　・三角関数　・増減俵

いろいろな着想や工夫に富んだ解答がみられ、楽しく審査させていただき、また、学ばせて頂きました。

誤答としては、８寸、１０寸、無理数などがみられました。また、ポケットコンピュータのベーシックプログラムを用いた解答がありましたが、考えの筋道を記す数学の答案としては認められないという理由で正解とはしませんでした。

問題文の「(前略) ～ その接点は、小円の中心と大円の中心を結ぶ直線上にあります。」は、『「(前略) ～ 内接する半径最大の円が４つある。」としたほうが、より和算らしい自然な問題表記になったのではないかと思います。』と貴重な指摘をしていただいた方もいました。

「今回は簡単でした。」、「答えが整数値になるのがきれいです。」、「今年も楽しませてもらいました。昨年は悔しい思いをしたので、今回は格別です。毎年のチャレンジを続けたいと思います。」という内容の感想もあり、出題者も元気づけられました。

優劣つけがたい正解の中から賞に該当するものを選定することは、大変難しいことです。過去に受賞歴があり、今回も素晴らしい解答を寄せられ、再受賞となられた方もいました。

今後も、できるだけ多くの方々が和算文化にふれることができるよう、和算問題を提供していきたいと思います。挑戦者の皆様の熱意に敬意を表し、審査を終わらせていただきます。

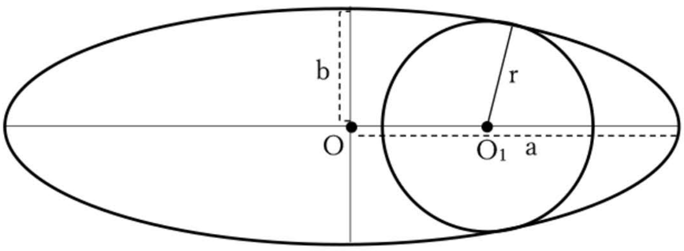
○解答例

[解答例１]

$\boxed{\text{補助定理}}$

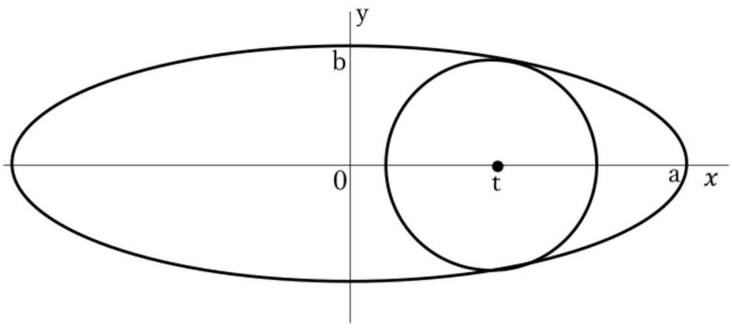
楕円 O(a, b)に２点で内接する円をO₁(r)とすると,

$$\mathbf{OO_1}=\frac{\sqrt{(\mathbf{a^2}-\mathbf{b^2})(\mathbf{b^2}-\mathbf{r^2})}}{\mathbf{b}}\quad (a>b>r>0)$$



〔証明〕

楕円 ： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ ・・・①



内接円の中心の x 座標を t (>0) とすると,

内接円の方程式は,

$$(x-t)^2+y^2=r^2 \qquad \cdots ②$$

② から y^2 を求めて ① に代入すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{r^2-(x-t)^2}{b^2}=1$$

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2tx+a^2t^2+a^2b^2-a^2r^2=0$$

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2tx+a^2(t^2+b^2-r^2)=0$$

$$\frac{D}{4}=a^4t^2-a^2(a^2-b^2)(t^2+b^2-r^2)=0$$

$$a^2t^2-(a^2-b^2)(b^2-r^2+t^2)=0$$

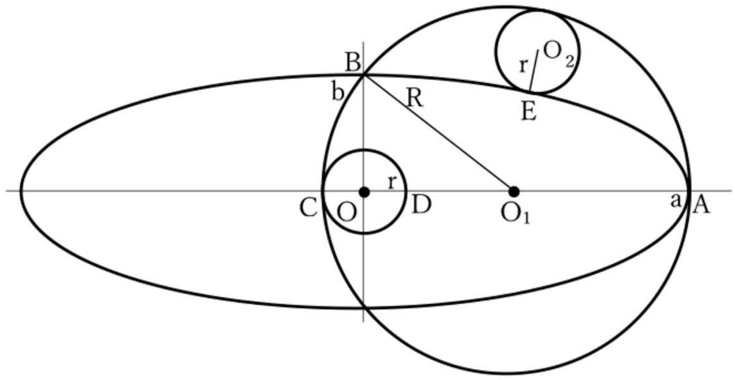
$$b^2t^2-(a^2-b^2)(b^2-r^2)=0$$

$a>b>r>0$ より, $OO_1=t=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}$ 　終証

・・

〔1〕

図のように, 楕円 O(a, b)（ただし, a>b>0),



大円 O_1(R), 小円 O(r), O_2(r)とし,

楕円と小円 O_2 との接点を E とする。

$$OA=CA-CO$$

$$a=2R-r \qquad \cdots ③$$

直角三角形 BOO_1 に三平方の定理を用いると,

$$BO^2+OO_1{}^2=O_1B^2$$

$$BO^2+(CO_1-CO)^2=O_1B^2$$

$$b^2+(R-r)^2=R^2$$

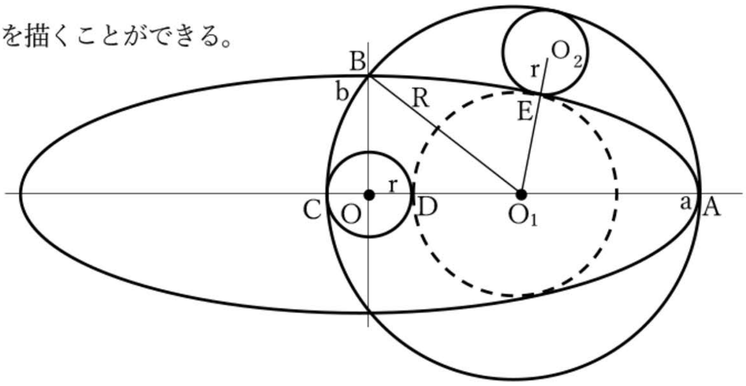
$$b^2=(2R-r)\,r \qquad \cdots ④$$

〔2〕

題意より，図のように，２個の小円に点Ｄ，Ｅで外接し，

大円と同心の補助円（楕円にＥで内接する破線の円）を描くことができる。

（O_1EO_2は共線となっている。）



$$\left(補助円の半径\right) = O_1D = O_1C - CD = R - 2r$$

補助定理を用いると，

$$OO_1 = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)\left\{b^2 - \left(R - 2r\right)^2\right\}}}{b}$$

$OO_1 = O_1C - OC = R - r$ を上式に代入すると，

$$R - r = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)\left\{b^2 - \left(R - 2r\right)^2\right\}}}{b}$$

$$(R - r)^2b^2 = (a^2 - b^2)\left\{b^2 - \left(R - 2r\right)^2\right\}$$

④を用いると　$\left(左辺\right) = (R - r)^2(2R - r)\ r$　・・・⑤

③④を用いると　$\left(右辺\right) = \left\{(2R - r)^2 - (2R - r)r\right\}\left\{(2R - r)r - \left(R - 2r\right)^2\right\}$

$$= \left(4R^2 - 6Rr + 2r^2\right)\left(-R^2 + 6Rr - 5r^2\right)$$

$$= -2(R - r)^2\ (2R - r)(R - 5r)$$　・・・⑥

⑤⑥より　$(R - r)^2(2R - r)\ r = -2(R - r)^2\ (2R - r)(R - 5r)$

$R \neq r$，$2R \neq r$ より　$r = -2(R - 5r)$

$$2R = 9r \qquad (= 2r \times 9 \div 2)$$

したがって，　$\left(大円の直径\right) = \left(小円の直径\right) \times 9 \div 2 = 2 \times 9 \div 2 = 9$

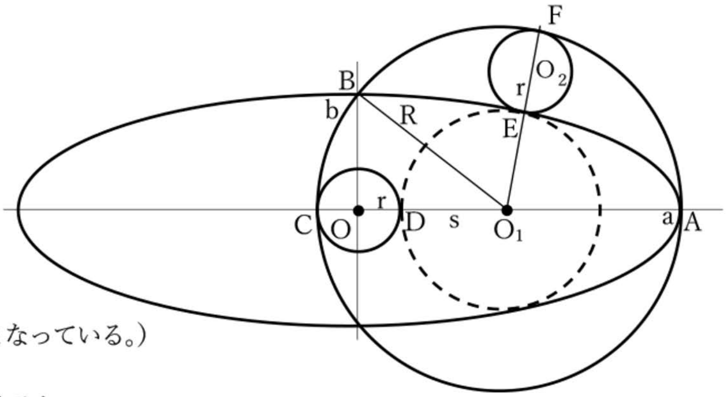
答　９寸

参考　$a = 8$，$b = 2\sqrt{2}$，$r = 1$，$R = \frac{9}{2}$，$\left(補助円の半径\right) = \frac{5}{2}$　となります。

※補助定理は，算法助術 84 と同じ内容になります。

円柱の斜断による証明は，『 新解説・和算公式集　算法助術　編著　土倉 保　朝倉書店 』などを参照してください。

[解答例 2]



図のように，楕円O(a, b)（ただし，a>b>0），

大円O_1(R)，小円O(r)，O_2(r)とし，

楕円と小円O_2との接点をEとする。

題意より，図のように，２個の小円に点D，E

で外接する補助円（大円と同心で，楕円にEで内接

する破線の円）を描くことができる。(O_1E O_2は共線となっている。)

中央の小円と補助円の接点をDとし，O_1D＝s　とすると，

$a=2R-r$　　　$b^2=R^2-(R-r)^2=2rR-r^2$　　　$s=R-2r$　　　・・・・・①

楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　　・・・・・②

O_1を中心とし，半径sの補助円の方程式は　$(x-s-r)^2+y^2=s^2$　　　・・・・・③

③を変形し，②に代入して分母を払うと

$$b^2x^2+a^2\left\{s^2-(x-s-r)^2\right\}=a^2b^2$$

$$(b^2-a^2)x^2+2a^2(s+r)+a^2\left\{s^2-(s+r)^2-b^2\right\}=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

点Eで②と③は接し，④の判別式 $D/4a^2=0$ となるから

$$a^2(s+r)^2-(b^2-a^2)\left\{s^2-(s+r)^2-b^2\right\}=0$$

①を代入して

$$(2R-r)^2(R-r)^2-\left(-4R^2+6rR-2r^2\right)\{-(4rR-4r^2)\}=0$$

$$(2R-r)^2(R-r)^2-2(2R-r)(R-r)\cdot 4r(R-r)=0$$

$$(2R-r)(R-r)^2\{(2R-r)-8r\}=0$$

$$(2R-r)(R-r)^2(2R-9r)=0$$

$(2R-r)(R-r)^2\neq 0$ より

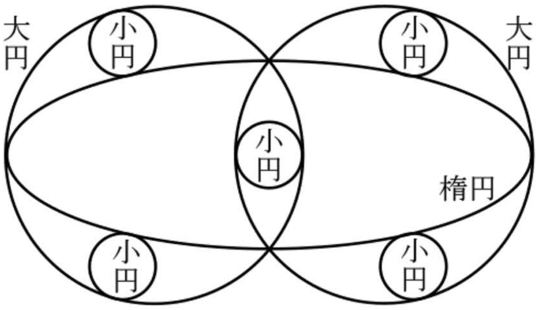
$R=\dfrac{9}{2}r$　　$\therefore\ (2R)=\dfrac{9}{2}(2r)$　　　(大円径)$=\dfrac{9}{2}$(小円径)

小円径＝２寸　　より　　　大円径＝９寸　　　・・・・・・・答

○解説

上級問題

上級問題は､岩手県一関市藤沢の保呂羽神社に明治７年(1874)11 月に奉納されたものです。関流八伝の千葉胤英と九伝の菅原勘五郎の門人 11 人によるものです。現在、この算額は残っていませんが、「社中算額集」という記録により知る事ができます。



今有如図設大円交画側円容小円五個其
小円径二寸問大円径幾何
答曰　大円径九寸
術曰置小円径九因二除之得大円径合問

《現代訳》

今、図のように、大円が交わるところに側円(楕円)をかき小円を５個容れる。小円径(直径)が２寸のとき、大円の直径はいくらか。

答え　大円の直径は９寸

術　小円径に９をかけ２でわれば大円径を得て問いに合う

残念ながら算額の文面だけでは、どのように解いたのかはわかりません。

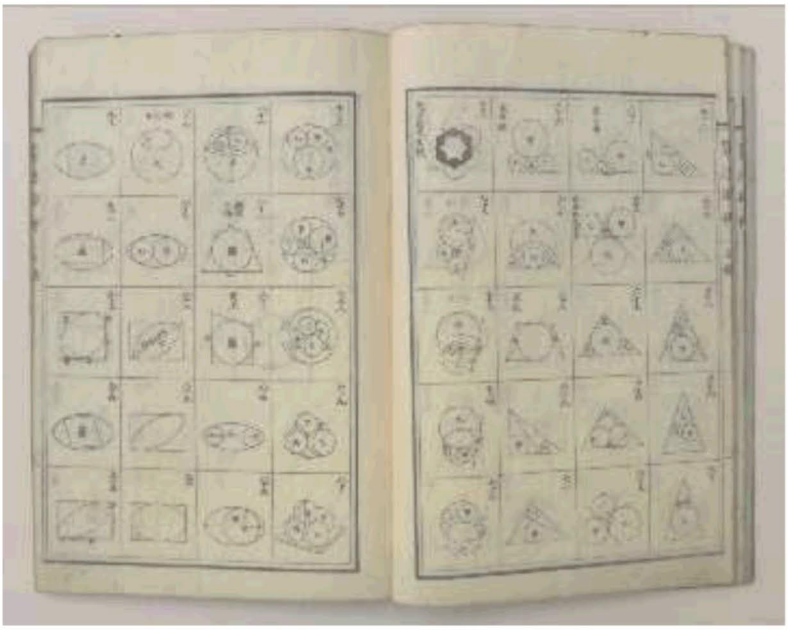
『千葉県の算額』によると、成田山新勝寺に明治２年(1869)に奉納された算額に同じ問題があります。こちらでは、小円の直径が１寸とし、答えは４寸５分となっています。解き方を書いた「術」の文も同様です。

この算額を奉納したのは北総の後藤磯右衛門政紀の門人が奉納したもので、５題の問題の後に５２人の門人の名が列記され、この地域の和算の広がりを知ることができます。

一関の算額を奉納した人々と同じ関流ですが、つながりは確認できません。
一関の人々がお伊勢参りに行く場合、成田山を参詣する人も多かったようですから、そんな時に目にとめた可能性もあります。

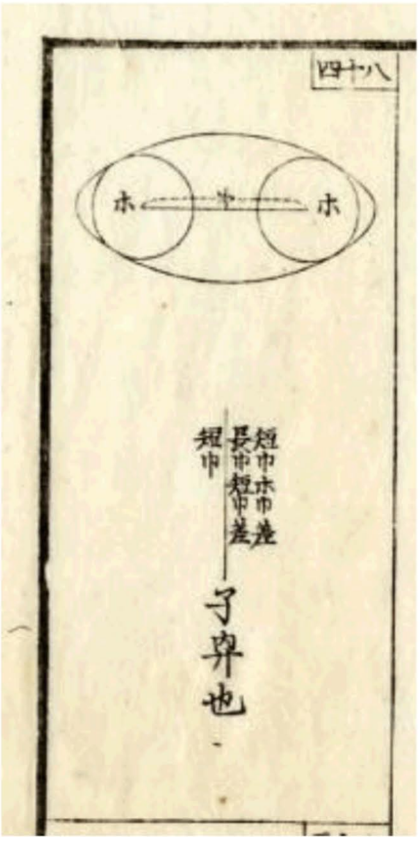
解答例１の$\boxed{\text{補助定理}}$は､『算法助術』に記載されている定理です。

『算法助術』は、江戸の長谷川数学道場から天保 12 年(1841)に出版されたもので、基本的な幾何学の公式１０５種をまとめたものです。



『算法助術』

八十四



図形の下に書いているのは、点竄術（てんざんじゅつ）や傍書法（ぼうしょほう）といわれる関孝和が考案した式で、

現代の数式で表すと次のようになります。

※巾（冪の略）は２乗のことです。

$$\frac{\left(\text{短径}^{2}-\text{等円径}^{2}\right)\left(\text{長径}^{2}-\text{短径}^{2}\right)}{\text{短径}^{2}}=\text{子}^{2}$$