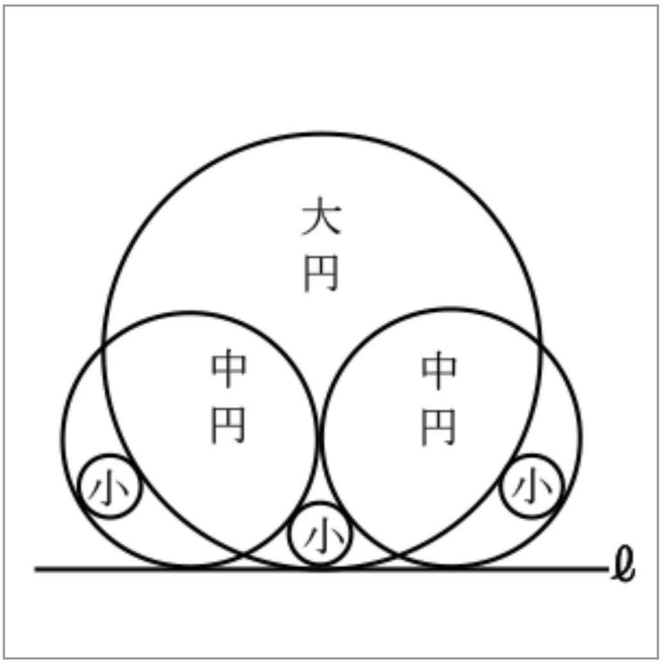
令和2年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県一関市の伊吹神社に明治17年(1884)に奉納された算額の問題をもとにしました。

直線ℓに大円1個、中円2個、小円1個が図のように接しています。また左右の小円は中円、大円に接し、3円の中心は一直線上にあります。
小円の直径が2寸のとき、大円の直径を求めなさい。



○審査員講評

「きれいな図形、シンプルな結末。本当に見事です。先人はこんな問題をよく考えついたものである。」との感想が多数の応募者よりありました。

今回の問題は上級と同様、対称形の図が中心にありました。それだけに解にたどりつく、いろいろなアプローチが考えられました。すばらしい、新鮮な素材を目前にした、まさに腕に覚えのある料理人の心境ではなかったでしょうか。

盛られた情報を、自分なりに図に描き出し、あるいは文字に置き換えてすすめる論理的思考の楽しさは「和算の問題」の生命だと考えております。

さて、今回の中級問題への挑戦者は５００名を越え、中学生より上の年代の人がほとんどでした。正解率も８０％以上とほぼ正解の方で占められました。(半径７寸の解答も正解としました)

解法も多様でした。具体的には次のような方法がありました。

- ２つの直角三角形による、２つの三平方の定理を連立にしたもの
- 三平方の定理と、方べきの定理、共通外接線の性質などを組み合わせ、連立をさせたもの
- 直線ℓと２つの中円とその間の小円を線対称に折り返したもの
- 座標を設定し、すすめたもの
- 直観的に中円と小円の間の関係を見つけて、論をすすめたもの

これらの解法は「中円と小円の関係を求めてから大円径を求める」事でほぼ共通していました。

細かい事柄として、次の点にも留意したいものです。

- 対称形の図形なので半分の図でも処理可能であること
- 結果としてそれぞれの円の径の比が整数となる見事さ
- 中円の中に小円が互いに接して４個あるという直観的ひらめき
- 大円の中心を中心として小円が１個描けるという図形上の妙味
- 提示された小円の径が「２」であることを最初から利用するか、最後のまとめで使用するかで解の簡潔さの度合いが異なること

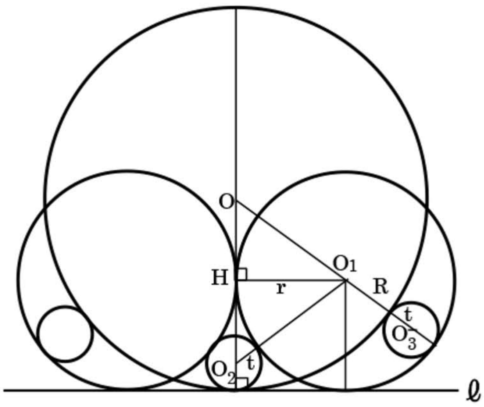
これらを考慮すれば、よりスムーズに解に至る道が見えてくると思います。

最後に中学高校単位の取り組みとして、まとめての応募がたくさんありました。若い年代に和算の神髄が浸透していく一過程として大変ありがたい事です。感謝します。解については非常にていねいですばらしい内容のものもある反面、解に至る過程が不明なものもあり、この点については一言「解」のつくり方を指導していただければ幸甚です。

○解答例

[解答例１]

大円を O(R), 右側の中円を O_1(r), 直線ℓと接する小円を O_2(t), 右側の小円を O_3(t), ２つの中円の接点を H とする。



(1) 直角三角形 O_1HO_2 に三平方の定理を用いると,

$$O_1H^2+O_2H^2=O_1O_2{}^2$$

$$r^2+(r-t)^2=(r+t)^2$$

$$r^2-4tr=0$$

$$r(r-4t)=0$$

$r\neq0$ より, $r=4t$ ・・・・・①

(2) ①を用いると,

$OH=R-r=R-4t$ ・・・・・②

$HO_1=r=4t$ ・・・・・③

$OO_1=OO_3-O_1O_3=(R+t)-(r-t)=R-r+2t=R-4t+2t=R-2t$ ・・・・・④

直角三角形 OHO_1 に三平方の定理を用いると, ② ③ ④より,

$OH^2 + HO_1{}^2 = OO_1{}^2$

$(R-4t)^2 + (4t)^2 = (R-2t)^2$

$4tR = 28t^2$

両辺を 2t で割ると

$2R = 14t$

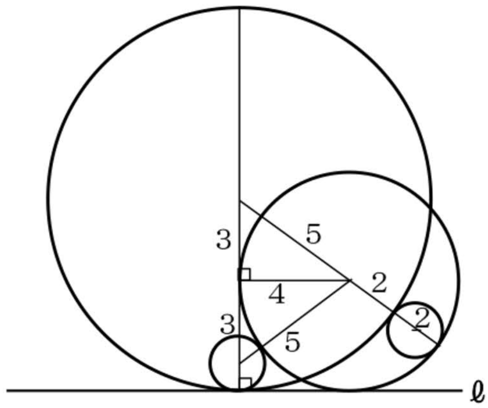
$2R = 7 \times 2t$

2t＝2だから

$(大円の直径) = 7 \times (小円の直径) = 7 \times 2 = 14$

<u>答え　１４寸</u>

参考　　結果的に，$\triangle O_1OH \equiv \triangle O_1O_2H$　となり，
３，４，５の直角三角形になります。

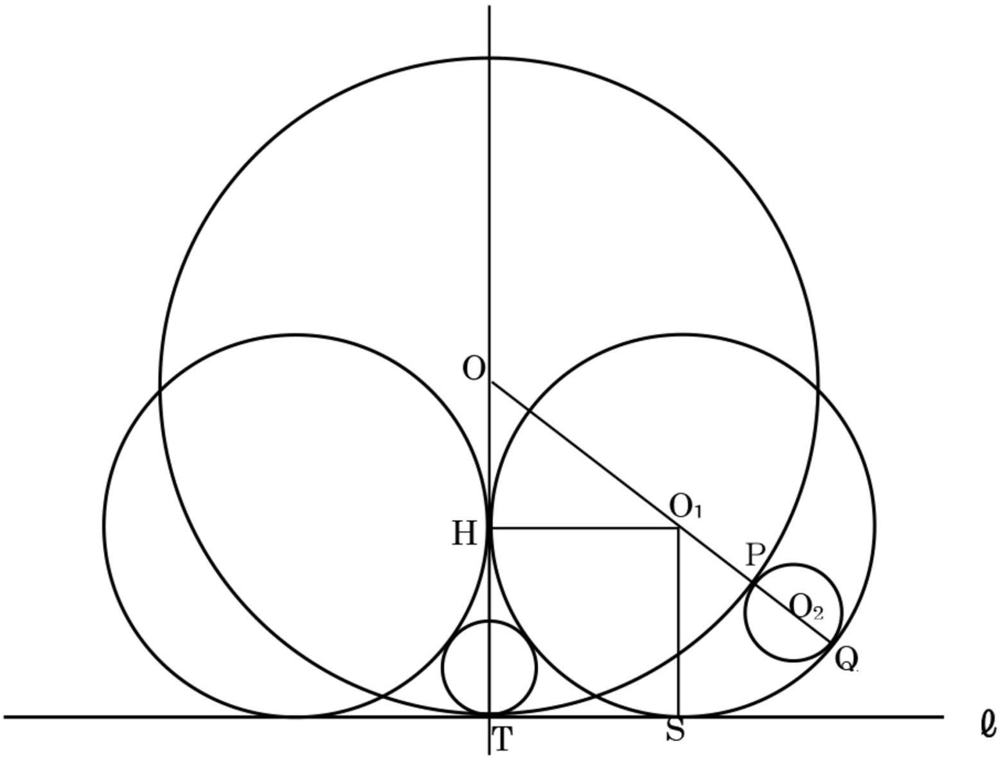


[解答例２]

大円Ｏ（Ｒ)、中円O_1（r_1)、小円O_2（r_2）とする。

Ｒ、r_1、r_2は半径。図のように

接点Ｐ，Ｑ，Ｓ，Ｔ，Ｈをとる。



点Ｏ、O_1、O_2　は一直線上にあるので、

$OH=R-r_1$，$OO_1=R-O_1P=R-(r_1-2r_2)$，$O_1H=r_1$・・・①

直角三角形OHO_1において、$OO_1{}^2=OH^2+O_1H^2$　　①を代入して

$\left\{R-(r_1-2r_2)\right\}^2=r_1{}^2+\left(R-r_1\right)^2$　　展開して整理すると

$-4R\cdot r_2=4r_2{}^2-4r_1\cdot r_2-r_1{}^2$・・・・・②

また、円O_1、O_2直線 ℓ に接し（互いに外接している）ているので、

$ST=O_1H=r_1=2\sqrt{r_1\cdot r_2}$　　　つまり、$r_1=4r_2$・・・・・③

②、③よりr_1を消去すると

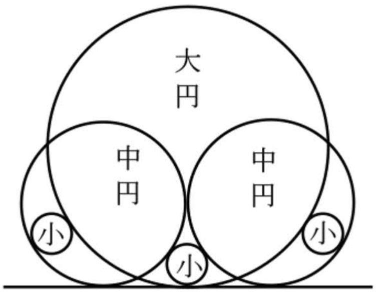
$-4R\cdot r_2=4r_2{}^2-16r_2{}^2-16r_2{}^2=-28r_2{}^2$

∴　$R=7r_2=7\times1=7$

∴　大円の直径＝２Ｒ＝１４寸

中級問題

中級問題は、岩手県一関市川崎の伊吹神社に明治 17 年(1884)に奉納された算額の問題をもとにしました。小山忠平梅盛によるもので、３題の問題のうち最初の問題です。



今有図線上設大円径一個中円径二個小円径
三個其小円若干問大円径得術幾何
答曰如左文
術曰置小円径七之大円径得問合

《現代訳》

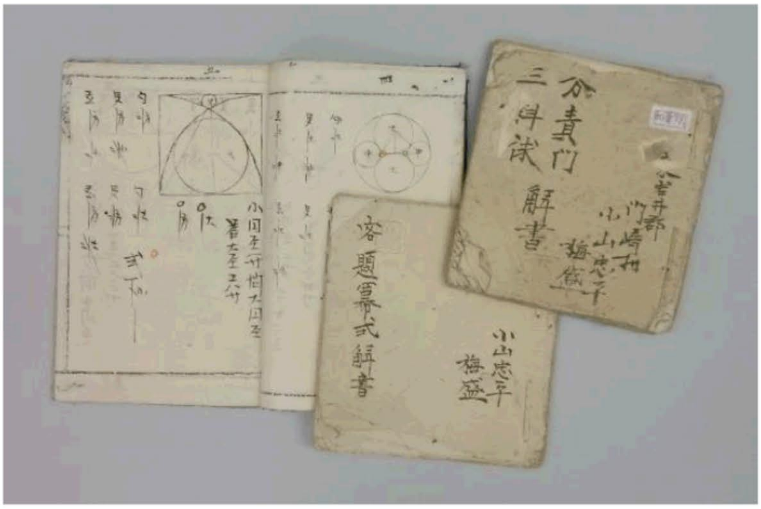
今、図のように線の上に大円１個、中円２個、小円３個がある。小円の直径が与えられた時、大円の直径はいくらか。

答えて曰く　左の文の如し

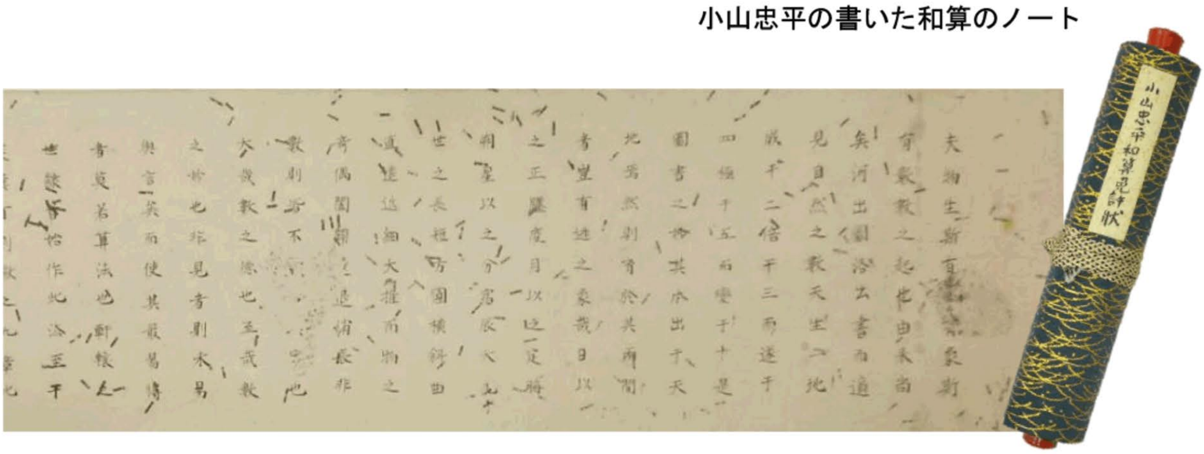
術に曰く
小円を置き７をかけると答えに合う

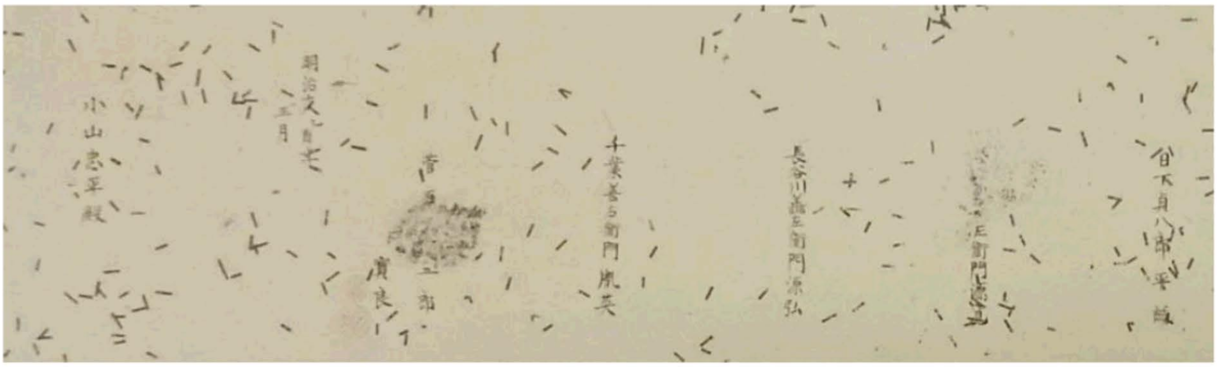
答えは合っていますが算額の文章だけでは、どのように解いたかは不明です。

小山忠平は、伊吹神社のある村に住んでいました。算額を奉納したのは、２０歳頃と推定されています。一関市博物館では、ご子孫の方から寄贈された１３０点余りの和算資料を所蔵しています。



小山忠平の書いた和算のノート





小山忠平見題免許状

明治 18 年に師匠の菅原勘五郎から授けられた和算の免許状です。関流では、５段階の免許があり、この見題免許は第一段階のものです。最後には、関孝和を筆頭に代々の弟子の名が連ねられ、菅原勘五郎は９代めにあたり、関流九伝となります。