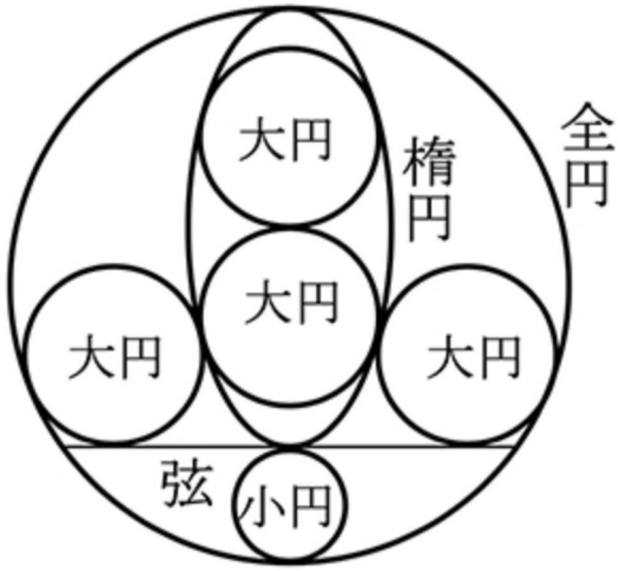
令和3年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・岩手県奥州市の胆沢城跡鎮守府八幡宮に弘化2年(1845)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、小円と楕円と左右の大円が、全円に内接し、全円の弦にも接しています。左右の大円は楕円に外接しています。

互いに接する上下の大円は、楕円にそれぞれ2点で接しています。下の大円は、楕円との接点で左右の大円にも接しています。

全円の直径を小円の直径を用いて表わしてください。



審査員講評

ロサンゼルス・エンゼルスの大谷翔平の出身地でもある岩手県奥州市にある胆沢城跡鎮守府八幡宮に奉納された算額（現存）の問題をもとにしました。この問題と類似の問題が、白山神社（一関市弥栄、慶応２年（1866）奉納）や八雲神社（一関市花泉町、天保１５年（1844）奉納）にも掲額されました。

上級問題は高校１年生から８９歳の方まで応募いただき、一人で４通りの解答を提出してくれた方もいました。Ａ４判９枚にも及ぶ大作もあり、挑戦者の熱意を感じ取りました。年代別の割合でみると、例年の傾向ですが、２０～４０歳代が少なく、５０代以上が多い結果となりました。

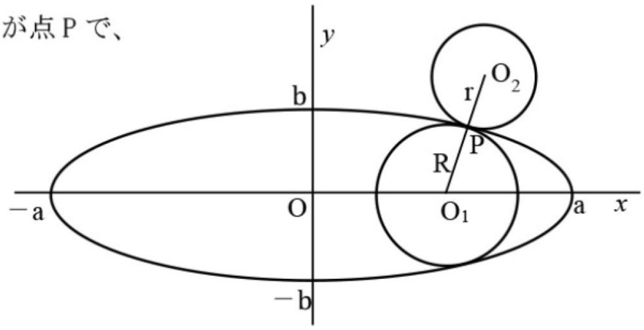
多くの方の答案は、現代流の解析幾何学を用いていましたが、和算流の解法も見られました。提出された答案を審査して、解析幾何学の解法は、計算量が少なくて済む傾向がありました。和算を研究されていると思われる方の和算流の解答は、審査にあたった私たちも勉強させられました。また、図形を色付けした解答も見られました。

現代流の解法での座標軸の設定では、図を90°右回転し、楕円の長軸を x 軸にし、原点を楕円の中心として考察したものが多く、全円の中心を原点としたもの、楕円と小円の接点を原点としたものもありました。判別式を使った解答が多く見られましたが、微分を用いて楕円と２つの大円の接点での微分係数から接線や法線を求めるものもありました。全円、大円、小円それぞれの半径、楕円の長軸の長さ、短軸の長さの関係を調べ、三平方の定理を用いていました。三平方の定理を用いずスチュワートの定理を用いているものもありました。その他、円や楕円の（x_1, y_1）での接線の公式、三角関数を用いたり、楕円を円に変換するものなど着想や工夫に富んだ解答がみられ、多様な解法がありました。

和算流の解法では、円柱の斜断図が立体的に見えるように丁寧に描かれている方もいました。また、側円術（算法助術の和算公式 84、85、87、99 など※上級解説参照）をきちんと証明しながら、それを利用していました。和算について勉強している方と思われます。（側円とは、現代の楕円のこと。）

側円術を現代流に表現すると、次のようになります。

右図のように、楕円0(a, b)に２点で内接する円を0_1(R) 、外接する円を0_2(r)とする。円0_1と円0_2が点Ｐで、接しているとき、次の関係がある。



Ⅰ.　$$\mathbf{OO_1}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}}{b}$$

Ⅱ.　$$\mathbf{P}\left(\frac{a^2\sqrt{b^2-R^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}},\ \sqrt{\frac{a^2R^2-b^4}{a^2-b^2}}\right)$$

Ⅲ.　$$\mathbf{O_2}\left(\frac{(a^2R+b^2r)\sqrt{b^2-R^2}}{bR\sqrt{a^2-b^2}},\ \frac{(R+r)\sqrt{a^2R^2-b^4}}{R\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

誤答としては、６×(小円の直径)、無理数×(小円の直径)などがあり、計算ミスなどによるものでした。

「答えが整数倍になるのが美しい。」との感想を持たれた方がたくさんいました。また、過去の受賞者の方は、今回の問題から派生する幾何学性質について発見したことを証明し、提出して頂きました。

毎回思うことですが、たくさんの素晴らしい答案、優劣つけがたい答案の中から賞に該当するものを選定することに、大変悩むところです。毎回優秀な解答を提出して頂いている方々もいますが、なるべく受賞歴のない方を優先して選定させて頂きました。

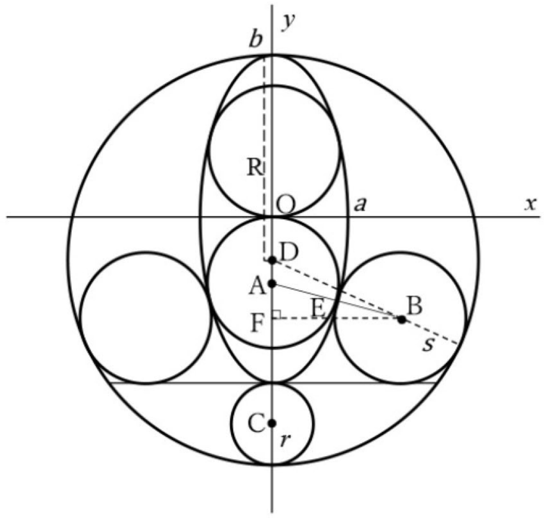
挑戦者の皆様の熱意に敬意を表し、審査を終わらせていただきます。

○解答例

右図のように，楕円の中心を通り弦と平行な直線を x 軸，楕円の中心を通り弦と垂直な直線を y 軸とする座標軸をとる。

楕円の中心を O，長軸を $2b$，短軸を $2a$ とする（$b>a$）。楕円に内接する下の大円を A(s)，楕円に外接する右側の大円を B(s)とする。

小円を C(r)，全円を D(R)とする。楕円 O，大円 A，大円 B の接点を E とする。B から y 軸に下した垂線の足を F とする。



楕円及び各円の方程式は下記の通りである。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$b>a$） ・・・・・・・・・・・・・・・①

円 A $x^2+(y+s)^2=s^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・②

円 B $(x-c)^2+\{y-(b-s)\}^2=s^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・③

ただし c は大円 B の中心の x 座標である。

円 C $x^2+\{y+(b+r)\}^2=r^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・④

円 D $x^2+\{y+(\mathrm{R}-b)\}^2=\mathrm{R}^2$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑤

楕円①と円 A②は接するので，

$$\frac{s^2-(y+s)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad b^2\{s^2-(y+s)^2\}+a^2y^2=a^2b^2$$

整理して $(a^2-b^2)y^2-2b^2sy-a^2b^2=0$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑥

判別式 $\dfrac{D}{4}=0$ より $b^4s^2+(a^2-b^2)a^2b^2=0$

$s^2=\dfrac{a^2(b^2-a^2)}{b^2}$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑦

接点 E の y 座標は判別式 D=0 より $y=\dfrac{b^2s}{a^2-b^2}$ ・・・・・・・・・・・・・⑧

また，接点 E の y 座標は，$\mathrm{A}\left(0,\ -s\right)$，$\mathrm{B}\left(c,\ -(b-s)\right)$ の中点だから

$y=-\dfrac{b}{2}$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑨

⑧，⑨より $\dfrac{b^2s}{a^2-b^2}=-\dfrac{b}{2}$

$s=\dfrac{b^2-a^2}{2b}$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑩

⑦，⑩より $\left(\dfrac{b^2-a^2}{2b}\right)^2=\dfrac{a^2(b^2-a^2)}{b^2}$ $b^2-a^2=4a^2$

∴ $b=\sqrt{5}a$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑪

⑪を⑩に代入して $s=\dfrac{\left(\sqrt{5}a\right)^2-a^2}{2\times\sqrt{5}a}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$ ・・・・・・・・・・・・・・・⑫

次に接点 E のx座標を求める。

接点 E のy座標は⑨⑪より　$y=-\dfrac{b}{2}=-\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$　・・・・・・・・・・・・・⑬

②を変形し　$x^2=-2ys-y^2$

⑫⑬を代入し　$x^2=-2\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\right)\times\dfrac{2a}{\sqrt{5}}-\left(-\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2=\dfrac{3a^2}{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\quad(\because x>0)$

すなわち大円 B の中心の x 座標は　$c=2\times\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\sqrt{3}a$　である。

また　$2\mathrm{R}=2b+2r$　より $\mathrm{R}=b+r$である。

D，F，B の座標は，$\mathrm{D}(0,\ -r)$，$\mathrm{F}(0,\ -(b-s))$，$\mathrm{B}(\sqrt{3}a,\ -(b-s))$だから

△DFB は直角三角形より，$\mathrm{DB}^2=\mathrm{DF}^2+\mathrm{FB}^2$を利用して

$$(\mathrm{R}-s)^2=\{r-(b-s)\}^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2$$

$$\{r+(b-s)\}^2=\{r-(b-s)\}^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2$$

$$4(b-s)r=3a^2$$

$$4\left(\sqrt{5}a-\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)r=3a^2\quad(\because ⑪⑫)$$

$$4\times\frac{3}{\sqrt{5}}r=3a$$

$$r=\frac{\sqrt{5}}{4}a$$

よって　$\mathrm{R}=b+r=\sqrt{5}a+\dfrac{\sqrt{5}}{4}a=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}a=5r$

$\therefore 2\mathrm{R}=5\times 2r$

答　(全円の直径) ＝ 5 × (小円の直径)

【参考】

(大円の直径) ＝ $\dfrac{8}{5}$ × (小円の直径) ＝ 1.6 × (小円の直径)

(長軸の長さ) ＝ 4 × (小円の直径)

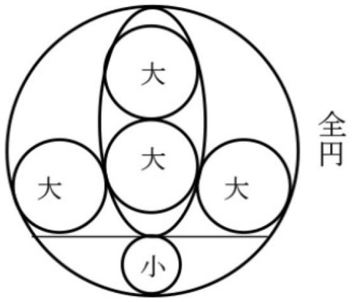
(短軸の長さ) ＝ $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ × (小円の直径) ≒ 1.79 × (小円の直径)

(弦の長さ) ＝ 4 × (小円の直径)

(長軸の長さ)^2 ＝ 5 × (短軸の長さ)^2

上級問題は、岩手県奥州市の胆沢城跡鎮守府八幡宮に弘化２年(1845)10 月 15 日に奉納された算額の問題をもとにしました。縦 93 ㎝、横 175.4 ㎝という大型の算額で、千葉胤秀の高弟の安倍保定の門人等による１３題が収録されています。中級問題の中尊寺阿弥陀堂算額は奉納した日が近いこともあり、両方の算額に関わっている人もいます。

この問題は、５番目にあり、地元佐野村の人によるものです。



今有全円内如図設線及側円容大円四個及乃側円周与大円周相親小円一個其小円径若干問得全円径術如何

答曰如左文

伊藤左一裕房門人　佐野村　佐藤三蔵大木戸

術曰置五個乗小円径得全円径合問

《現代訳》

今、図のように、全円の中に線及び側円（楕円）を設け、大円４個と小円１個をいれる。側円と大円は接する。小円の直径が与えられた時、全円の直径はいくらか。

答えて曰く　左の文のとおり

伊藤左一裕房門人
佐野村　佐藤三蔵大木戸

術に曰く　５個を置き小円の直径をかければ全円の直径となり、問いに合う

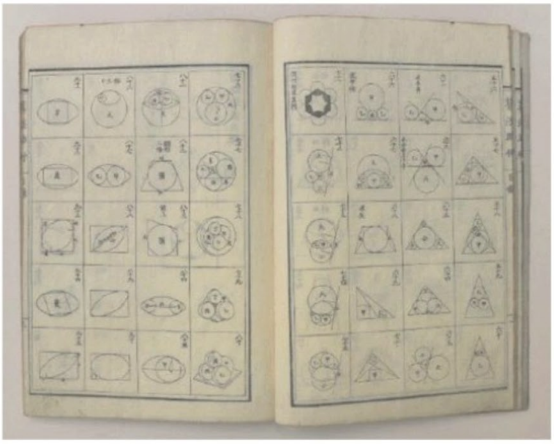
術に曰くを現代の数式に直すと

5×小円の直径＝全円の直径

となり、答えはあっていますが、やはり算額だけでは、どのように解いたのかはわかりません。

上級の審査員講評で触れていますが、和算の世界で知られていた楕円の定理を『算法助術』から紹介します。

『算法助術』は、江戸の長谷川数学道場から天保 12 年(1841)に出版されたもので、基本的な幾何学の公式 105 種をまとめたものです。



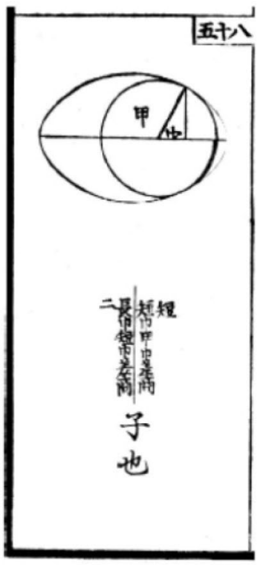
『算法助術』

８４、８５、８７、９９の定理は、下のように表わされています。図形の下に書いているのは、点竄術(てんざんじゅつ)や傍書法(ぼうしょほう)といわれる関孝和が考案した式で、現代の数式で表すと次のようになります。　※巾（冪の略）は２乗のこと、商は平方根です。

８４

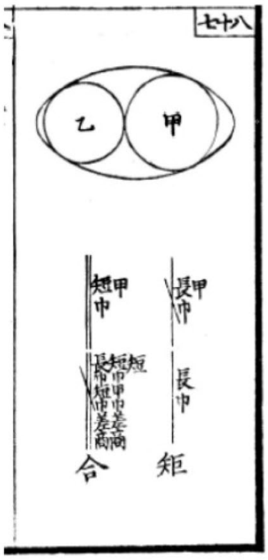
$$\frac{\left(短径^2 - 等円径^2\right)\left(長径^2 - 短径^2\right)}{短径^2} = 子^2$$

８５



$$\frac{短径 \cdot \sqrt{短径^2 - 甲^2}}{2\sqrt{長径^2 - 短径^2}} = 子$$

８７



$$-甲\cdot長径^2+長径^2+2甲\cdot短径^2-2短径\cdot\sqrt{短径^2-甲^2}\cdot\sqrt{長径^2-短径^2}=0$$

９９

$長径^2+短径^2+甲^2-4子^2-4丑^2$　を乾とし，

$-短径^2\cdot長径^2-甲^2\cdot\left(長径^2+短径^2\right)$

$\quad+4長径^2\cdot子^2+4短径^2\cdot丑^2$　を坤とすると，

(1)　$短径^2\cdot乙\cdot乾+2甲\cdot短径^4-乙^3\cdot長径^2=0$

(2)　$-乙^2\cdot坤-短径^4\cdot甲^2+2甲\cdot乙^3\cdot長径^2=0$

(3)　$甲\cdot短径^2\cdot乾-2乙\cdot坤+3甲\cdot乙^2\cdot長径^2=0$

(4)　$3甲^2\cdot短径^4+2短径^2\cdot乙\cdot甲\cdot乾-乙^2\cdot坤=0$