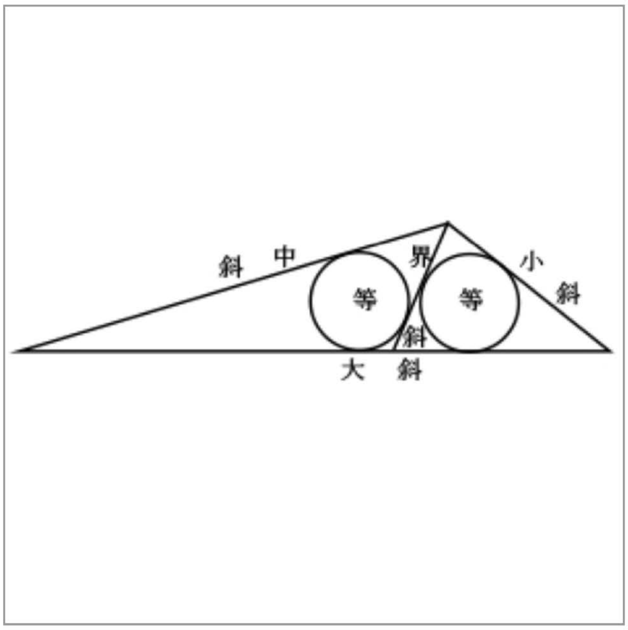
令和4年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・文政13年(1830)刊『算法新書』の問題をもとにしました。

図のように、三角形を上の頂点から対辺に引いた界斜で左右の三角形に分けます。左右の三角形の内接円の直径は同じです。大斜15寸、中斜11寸、小斜6寸の時、界斜 の長さを求めなさい。

※一つの図形を二つの図形に分ける線分を「界斜」といいます。
また、不等辺三角形の三辺を、長い順に「大斜」「中斜」「小斜」といいます。



○審査員講評

今年度の上級問題は、一関の和算家・関流七伝千葉雄七胤秀編『算法新書』巻之五・極形術用法・雑題解義（全50問中第12問目）の問題です。この著書は幕末期のベストセラーでもありました。『算法新書』からの出題は、初級問題ではH29、30年度、中級問題ではH16、17、18、26、R１年度、上級問題ではH21、22、23、26、27、年度に出題しています。

上級問題は『三斜等円術』（三斜とは不等辺三角形のこと）とよばれることもあり、出題にあたって類似問題が岐阜県の郡上八幡神社などに掲額されていることは認識していましたが、このことを指摘された方もいました。また、兵庫県伊丹市昆陽寺の算額や『増補当世塵劫記』にも類似問題があるということを指摘され、その資料を同封していただいた方々もおり、感謝申し上げます。出題、審査する側として大変勉強させられました。

H29年度からR３年度まで５年連続で楕円がらみの問題でしたが、今年度は「円と三角形に関する問題」で近年に比して応募者数、応募数が倍増し、小学校６年生から90歳まで広い年齢層の応募がありました。一人で複数通り（最大７通り）の解答を寄せた方、３回郵送した方などもいて、熱意が伝わってきました。「三角形と円だけなので昨年、一昨年に比べると易しかった」、「今年の上級問題は少し難易度が下がった」、「線分の長さがすべて整数になる美しい問題です」、「４次方程式で困惑した」などの感想をもたれたようです。

多かった解答方針は、界斜の長さと三角形の三辺の長さの関係から４次方程式をつくり、因数定理を用いて解く方法でした。この４次方程式を解く段階で、途中計算を省略した解答も見られ、どのようにして解に至ったのかわからないものもありました。

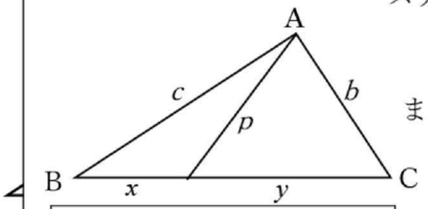
この問題の術文には『置中斜加小斜自之内減大斜冪餘開平方半之得界斜合問』と記されています。

これを現代の式で表すと　$\sqrt{(\text{中斜}+\text{小斜})^2-\text{大斜}^2}\div 2 = \text{界斜}$

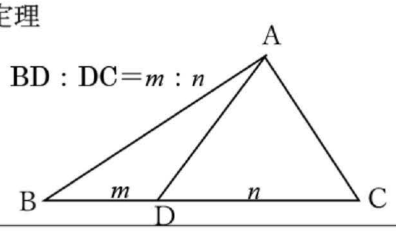
となりますが、和算流にこの一般式を導いてから、数値を代入して答えを出した方々もいました。

多く用いられた公式・定理は、ヘロンの公式、余弦定理、三角関数、タンジェントの加法定理、三平方の定理、スチュワートの定理などでした。中高生のためにスチュワートの定理を載せます。

スチュワートの定理



または



$b^2x + c^2y = a(p^2 + xy)$
ただし　$a = x + y$

$n\mathrm{AB}^2 + m\mathrm{AC}^2 = n\mathrm{BD}^2 + m\mathrm{CD}^2 + (m+n)\mathrm{AD}^2$
$m = n = 1$ のとき中線定理(パップスの定理)となる。

座標を用いた解析幾何で解いた鮮やかな解答もありました。『算法助術』を用いた解答は、項目$\boxed{36}$や補助円を用いて項目$\boxed{54}$などを使った方法がありました。解法の多さに審査する側も勉強させられました。

計算ソフトを使った解答がありましたが、筋道を立てて考察する過程を記してほしいものです。また、「４寸と仮定すると２円の直径が等しくなる。したがって解は４寸である。」という論法の解答がありましたが、これは十分性を示したもの（４寸以外に解があるかもしれない。）なので正答とはしませんでした。

この問題を拡張し、４つ（小斜、中斜、大斜、界斜）がすべて整数値になる場合の例を複数つくった方もいました。また、この問題から派生する図形の性質について考察された方々もおり、熱心な研究姿勢が伝わってきました。

毎年応募されている常連の方々のお名前を拝見し、また今年度はたくさんの新しい方のお名前も拝見することができました。来年度もまた拝見できることを楽しみにしています。

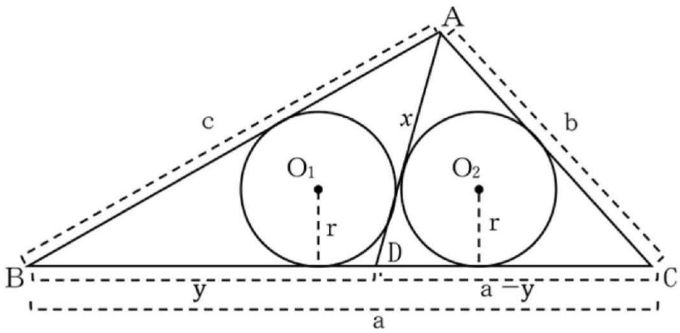
○解答例

解答例1

辺ＢＣ，辺ＣＡ，辺ＡＢの長さをそれぞれ

a (=15 寸)，b (=6 寸)，c (=11 寸) とする。

内接円の半径をｒ，求める線分ＡＤの長さを x とする。



右図のように，ＢＤ＝ｙとすると，ＤＣ＝ａ－ｙ

$$(\triangle \mathrm{ABD}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{r}\,(x + y + \mathrm{c})$$

$$(\triangle \mathrm{ACD}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{r}\,(x - y + \mathrm{a} + \mathrm{b})$$

この２つの三角形の面積比より

$$\frac{\mathrm{a} - y}{y} = \frac{x - y + \mathrm{a} + \mathrm{b}}{x + y + \mathrm{c}} \qquad \frac{y}{\mathrm{a} - y} = \frac{x + y + \mathrm{c}}{x - y + \mathrm{a} + \mathrm{b}}$$

$$y(x - y + \mathrm{a} + \mathrm{b}) = (\mathrm{a} - y)(x + y + \mathrm{c})$$

$$xy - y^2 + \mathrm{a}y + \mathrm{b}y = \mathrm{a}x + \mathrm{a}y + \mathrm{ac} - xy - y^2 - \mathrm{c}y$$

$$(2x + \mathrm{b} + \mathrm{c})y = \mathrm{a}(x + \mathrm{c})$$

$$\mathrm{BD} = y = \frac{\mathrm{a}(x + \mathrm{c})}{2x + \mathrm{b} + \mathrm{c}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①より　$\mathrm{DC} = \mathrm{a} - y = \mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}(x + \mathrm{c})}{2x + \mathrm{b} + \mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{a}(x + \mathrm{b})}{2x + \mathrm{b} + \mathrm{c}}$　………②

①②より　BD：DC＝$(x+\mathrm{c}):(x+\mathrm{b})$であるから，**スチュワート（Stewart）の定理**より

$$(x+\mathrm{b})\mathrm{AB}^2+(x+\mathrm{c})\mathrm{CA}^2=\{(x+\mathrm{c})+(x+\mathrm{b})\}\mathrm{AD}^2+(x+\mathrm{b})\mathrm{BD}^2+(x+\mathrm{c})\mathrm{DC}^2$$

$$(x+\mathrm{b})\mathrm{c}^2+(x+\mathrm{c})\mathrm{b}^2=\{(x+\mathrm{c})+(x+\mathrm{b})\}x^2+(x+\mathrm{b})\left\{\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right\}^2+(x+\mathrm{c})\left\{\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right\}^2$$

$$(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)x+\mathrm{bc}(\mathrm{b}+\mathrm{c})=(2x+\mathrm{b}+\mathrm{c})x^2+\frac{\mathrm{a}^2(x+\mathrm{b})(x+\mathrm{c})\ \{(x+\mathrm{c})+(x+\mathrm{b})\}}{(2x+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2}$$

$$(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)x+\mathrm{bc}(\mathrm{b}+\mathrm{c})=(2x+\mathrm{b}+\mathrm{c})x^2+\frac{\mathrm{a}^2(x+\mathrm{b})(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}$$

両辺に $2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}$ をかけると

$$\{(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)x+\mathrm{bc}(\mathrm{b}+\mathrm{c})\}\ \{2x+(\mathrm{b}+\mathrm{c})\}\ =\{2x+(\mathrm{b}+\mathrm{c})\}^2\,x^2+\mathrm{a}^2(x+\mathrm{b})(x+\mathrm{c})$$

右辺－左辺$=[4x^4+4(\mathrm{b}+\mathrm{c})x^3+\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2+\mathrm{a}^2\}x^2+\mathrm{a}^2(\mathrm{b}+\mathrm{c})x+\mathrm{a}^2\mathrm{bc}]-\{\ 2(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)x^2+(\mathrm{b}+\mathrm{c})^3x+\mathrm{bc}(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2\ \}$

$$=4x^4+4(\mathrm{b}+\mathrm{c})x^3-[2(\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2)-\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2+\mathrm{a}^2\}]x^2-\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^3-\mathrm{a}^2(\mathrm{b}+\mathrm{c})\}x-\mathrm{bc}\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}$$

$$=4x^4+4(\mathrm{b}+\mathrm{c})x^3-\{\mathrm{b}^2-2\mathrm{bc}+\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2\}x^2-(\mathrm{b}+\mathrm{c})\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}x-\mathrm{bc}\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}$$

$$=4x^4+4(\mathrm{b}+\mathrm{c})x^3+4\mathrm{bc}x^2-\{\mathrm{b}^2+2\mathrm{bc}+\mathrm{c}^2-\mathrm{a}^2\}x^2-(\mathrm{b}+\mathrm{c})\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}x-\mathrm{bc}\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}$$

$$=4\,\{x^2+(\mathrm{b}+\mathrm{c})x+\mathrm{bc}\}x^2-\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}\{x^2+(\mathrm{b}+\mathrm{c})x+\mathrm{bc}\}$$

$$=(x+\mathrm{b})(x+\mathrm{c})[4x^2-\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}]\ =\ 0$$

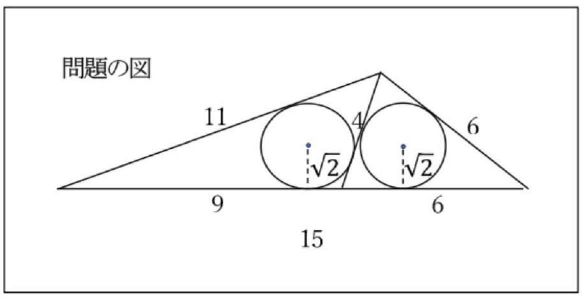
$x+\mathrm{b}\neq 0$，$x+\mathrm{c}\neq 0$ だから，　$4x^2-\{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2\}\ =\ 0$

$$x^2-\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2}{4}\ =\ 0$$

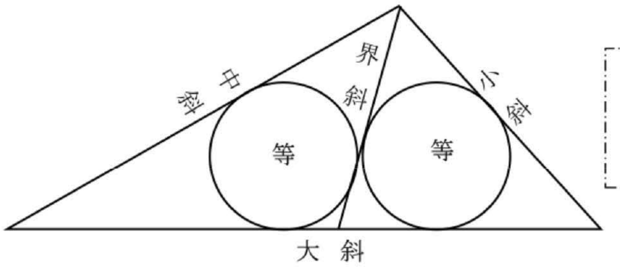
$(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2>0$　だから，　$x=\dfrac{\sqrt{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2}}{2}$

$\mathrm{a}=15$，$\mathrm{b}=6$，$\mathrm{c}=11$ を代入すると，　$x\ =\dfrac{\sqrt{(6+11)^2-15^2}}{2}\ =\ \dfrac{\sqrt{64}}{2}\ =\ 4$

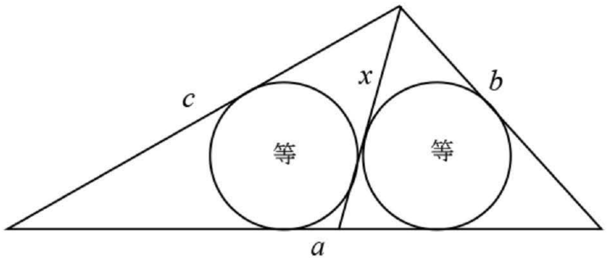
答　AD=4寸



［参考］



術文：　界斜 $= \dfrac{\sqrt{(\text{中斜}+\text{小斜})^2-\text{大斜}^2}}{2}$



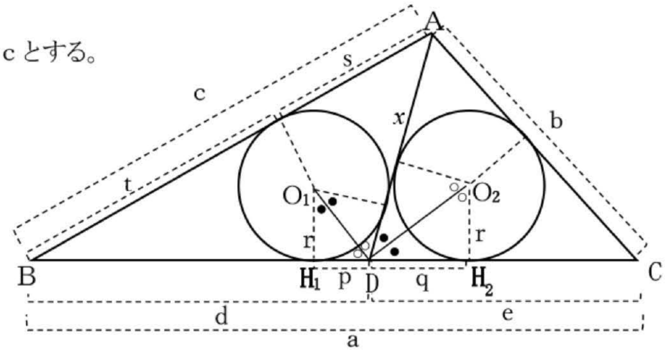
別表現

$a+b+c=2s$　とすると

$x=\sqrt{s(s-a)}$

解答例2

大斜BC，小斜CA，中斜ABの長さをそれぞれ a，b，c とする。
内接円の半径を r，求める界斜ADの長さを x とする。



右図において，$(\triangle\mathrm{ABD})=\mathrm{r(s+t+p)}$　……①

またヘロンの公式を用いれば，

$(\triangle\mathrm{ABD})=\sqrt{\mathrm{(s+t+p)\,s\,t\,p}}$ ……②

①②より，　$\mathrm{r\,(s+t+p)}=\sqrt{\mathrm{(s+t+p)\,s\,t\,p}}$

両辺を平方して　$\mathrm{r^2(s+t+p)^2=(s+t+p)\,s\,t\,p}$，　　$\therefore\ \mathrm{r^2}=\dfrac{\mathrm{s\,t\,p}}{\mathrm{s+t+p}}$　……………③

$\triangle \mathrm{O_1H_1D}$ と $\triangle \mathrm{DH_2O_2}$ において，　$\angle \mathrm{DO_1H_1} = \angle \mathrm{O_2DH_2}$，　$\angle \mathrm{O_1DH_1} = \angle \mathrm{DO_2H_2}$
２組の角がそれぞれ等しいので　$\triangle \mathrm{O_1H_1D} \backsim \triangle \mathrm{DH_2O_2}$
したがって，　$\mathrm{O_1H_1 : DH_2 = H_1D : H_2O_2}$

$\mathrm{r : p = q : r}$　　　$\therefore\ \mathrm{r^2 = p\,q}$　………………………④

③④より，　$\dfrac{\mathrm{s\,t\,p}}{\mathrm{s+t+p}}=\mathrm{p\,q}$　　$\therefore\ \mathrm{s\,t=(s+t+p)\,q}$　…………………⑤

$\mathrm{s}=\dfrac{x+\mathrm{c}-\mathrm{d}}{2}$，　$\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{c}+\mathrm{d}-x}{2}$，　$\mathrm{p}=\dfrac{x+\mathrm{d}-\mathrm{c}}{2}$，　$\mathrm{q}=\dfrac{x+\mathrm{e}-\mathrm{b}}{2}$　を⑤に代入すると

$$\frac{x+\mathrm{c}-\mathrm{d}}{2}\cdot\frac{\mathrm{c}+\mathrm{d}-x}{2}=\left(\frac{x+\mathrm{c}-\mathrm{d}}{2}+\frac{\mathrm{c}+\mathrm{d}-x}{2}+\frac{x+\mathrm{d}-\mathrm{c}}{2}\right)\cdot\frac{x+\mathrm{e}-\mathrm{b}}{2}$$

$(x+\mathrm{c}-\mathrm{d})(\mathrm{c}+\mathrm{d}-x)=(x+\mathrm{c}+\mathrm{d})(x+\mathrm{e}-\mathrm{b})$　…………………………………………………⑥

$(\triangle\mathrm{ABD}):(\triangle\mathrm{ACD})=\mathrm{d:e}$　より　$\dfrac{1}{2}\mathrm{r}(x+\mathrm{c}+\mathrm{d}):\dfrac{1}{2}\mathrm{r}(x+\mathrm{b}+\mathrm{e})=(x+\mathrm{c}+\mathrm{d}):(x+\mathrm{b}+\mathrm{e})=\mathrm{d:e}$

よって　$\dfrac{x+\mathrm{c}+\mathrm{d}}{\mathrm{d}}=\dfrac{x+\mathrm{b}+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{(x+\mathrm{c}+\mathrm{d})+(x+\mathrm{b}+\mathrm{e})}{\mathrm{d}+\mathrm{e}}=\dfrac{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}+\mathrm{e}}{\mathrm{d}+\mathrm{e}}=\dfrac{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$

(第１式)と(第５式)から　$\mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ ………⑦，　　(第２式)と(第５式)から　$\mathrm{e}=\dfrac{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ ………⑧

⑦⑧を⑥に代入すると，
$$\left\{x+\mathrm{c}-\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right\}\left\{\mathrm{c}+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}-x\right\}=\left\{x+\mathrm{c}+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\right\}\left\{x+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})}{2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}-\mathrm{b}\right\}$$

$2x+\mathrm{b}+\mathrm{c}=\mathrm{M}$ と置くと，
$$\left\{x+\mathrm{c}-\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{\mathrm{M}}\right\}\left\{\mathrm{c}+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{\mathrm{M}}-x\right\}=\left\{x+\mathrm{c}+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{\mathrm{M}}\right\}\left\{x+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})}{\mathrm{M}}-\mathrm{b}\right\}$$

両辺を$(x+\mathrm{c})$で割ると
$$\left\{1-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{M}}\right\}\left\{\mathrm{c}+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})}{\mathrm{M}}-x\right\}=\left\{1+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{M}}\right\}\left\{x+\frac{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})}{\mathrm{M}}-\mathrm{b}\right\}$$

両辺にM^2をかけて整理すると，　$\{\mathrm{a}-\mathrm{M}\}\{\mathrm{a}(x+\mathrm{c})-(x-\mathrm{c})\mathrm{M}\}+\{\mathrm{a}+\mathrm{M}\}\{\mathrm{a}(x+\mathrm{b})+(x-\mathrm{b})\mathrm{M}\}\ =0$

$$(x+\mathrm{c})\mathrm{a}^2-\{(x-\mathrm{c})+(x+\mathrm{c})\}\mathrm{Ma}+(x-\mathrm{c})\mathrm{M}^2\quad+(x+\mathrm{b})\mathrm{a}^2+\{(x-\mathrm{b})+(x+\mathrm{b})\}\mathrm{Ma}+(x-\mathrm{b})\mathrm{M}^2\ =0$$

a について整理すると，　$\mathrm{a}^2(2x+\mathrm{b}+\mathrm{c})+(2x-\mathrm{b}-\mathrm{c})\mathrm{M}^2\ =0$　すなわち　$\mathrm{a}^2\,\mathrm{M}+(2x-\mathrm{b}-\mathrm{c})\mathrm{M}^2\ =0$

$$\mathrm{a}^2+(2x-\mathrm{b}-\mathrm{c})(2x+\mathrm{b}+\mathrm{c})\ =0$$
$$\mathrm{a}^2+4x^2-(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2\ =0$$
$$x^2=\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2}{4}\qquad\therefore x=\frac{\sqrt{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-\mathrm{a}^2}}{2}\quad(\because x>0)$$

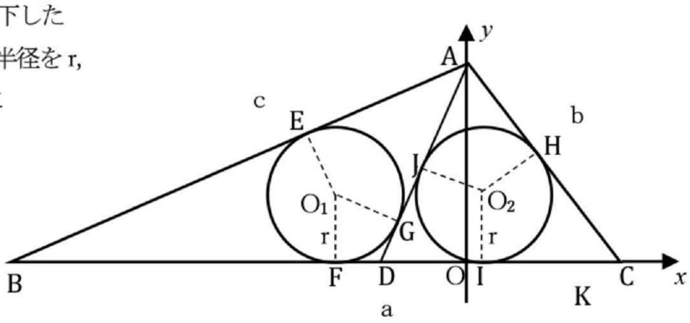
$\mathrm{a}=15,\ \mathrm{b}=6,\ \mathrm{c}=11$　を代入すると，$x=\dfrac{\sqrt{(6+11)^2-15^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{289-225}}{2}=\dfrac{\sqrt{64}}{2}=4$

答　4寸

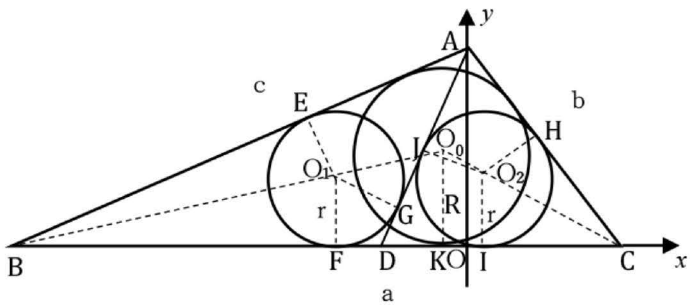
参考 ： ③ は『算法助術』の項目三十六と同値である。

解答例3

図のように△ABC において，BC をx軸，A から BC に下した垂線をy軸とする。x軸とy軸の交点を O とする。等円の半径を r，BC＝a ，CA＝b，AB＝ c，とする。さらに，△ABC に内接する最大の円の中心を$O_0(x_0, y_0)$，半径を R とする。O_0から BC に下した垂線の足を K とする。



また，三角形の中の二つの円の中心をO_1，O_2とする。この二つの円に接し A を通る直線とx軸との交点を D とする。
円O_1と直線 AB，BD，AD との接点を E，F，G とし，
円O_2と直線 AC，CD，AD との接点を H，I，J とする。



AG＝s，GD＝t，AJ＝u，JD＝v とおくと

AE＝AG＝s，　EB＝BF＝c−s，　FD＝DG＝t，

AH＝AJ＝u，　CI＝CH＝b−u，　DI＝DJ＝v，

は明らか。また，O_1O_2＝FI＝t+v　も明らか。

$\dfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})R=\dfrac{1}{2}\mathrm{a}\cdot\mathrm{AO}$ より
また，△ABC に内接する円の半径 R は，
$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{a}\cdot\mathrm{AO}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$\triangle\mathrm{CO_0K}\backsim\triangle\mathrm{CO_2I}$　より　$\mathrm{R}:\mathrm{r}=\mathrm{CK}:\mathrm{CI}$　　　$\mathrm{CI}=\mathrm{b}-\mathrm{u}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\mathrm{CK}$　・・・・・・・・・・・・・②

$\triangle\mathrm{BO_0K}\backsim\triangle\mathrm{BO_1F}$　より　$\mathrm{R}:\mathrm{r}=\mathrm{BK}:\mathrm{BF}$　　　$\mathrm{BF}=\mathrm{c}-\mathrm{s}=\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\mathrm{BK}$　・・・・・・・・・・・・・③

△ADB の３辺の長さの和は　$\mathrm{BD}+\mathrm{DA}+\mathrm{AB}=\mathrm{a}-(\mathrm{b}-\mathrm{u})+\mathrm{u}+\mathrm{c}=\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}+2\mathrm{u}$　・・・・・・・・・・・・・④

よって　△ADB の面積は　$\dfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b}+\mathrm{c}+2\mathrm{u})\mathrm{r}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{OA}$　・・・・・・・・・・・・・⑤

△ADCの３辺の長さの和は　$CD+DA+AC=a-(c-s)+s+b=a+b-c+2s$　・・・・・・・・・・・・・⑥

よって　△ADCの面積は　$\frac{1}{2}(a+b-c+2s)r=\frac{1}{2}CD\cdot OA$　・・・・・・・・・・・・・⑦

①⑤⑦より△ADB＋△ADC＝△ABC

$$(a+s+u)r=\frac{1}{2}a\cdot AO$$　・・・・・・・・・・・・・⑧

②③より　$\left(a+b+c-\frac{r}{R}a\right)=\frac{1}{2}(a+b+c)R$　・・・・・・・・・・・・・⑨

両辺に$\frac{2}{R}$をかけて　$2a\left(\frac{r}{R}\right)^2-2(a+b+c)\frac{r}{R}+(a+b+c)=0$　・・・・・・・・・・・・・⑩

$$\therefore\ \frac{r}{R}=\frac{(a+b+c)\pm\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}}{2a}$$

ここで　$r<R$　より　$\frac{r}{R}=\frac{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}}{2a}$　・・・・・・・・・・・・・⑪

一方　△ADB＋△ADC＝△ABC　と⑤⑦　より

$$\frac{1}{2}(c+BD+DA)r+\frac{1}{2}(b+CD+DA)r=\frac{1}{2}(a+b+c)R$$

$BD+CD=BC$ より　$(a+b+c+2DA)r=(a+b+c)R$　・・・・・・・・・・・・・⑫

$$\frac{r}{R}=\frac{a+b+c}{a+b+c+2DA}$$　・・・・・・・・・・・・・⑬

よって⑪⑬より　$\frac{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}}{2a}=\frac{a+b+c}{a+b+c+2DA}$

$$\left\{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}\right\}(a+b+c+2DA)=2a(a+b+c)$$

$$2DA=\frac{2a(a+b+c)-\left\{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}\right\}(a+b+c)}{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}}$$

分母を有理化して整理すると

$$=\frac{2a(a+b+c)\left\{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}\right\}-\{2a(a+b+c)\}(a+b+c)}{2a(a+b+c)}$$

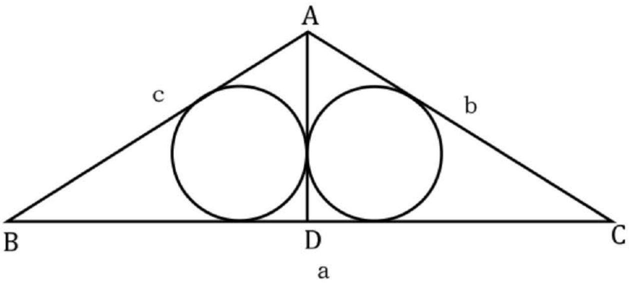
$$=\sqrt{(a+b+c)^2-2a(a+b+c)}$$

$$=\sqrt{(b+c)^2-a^2}$$

$$DA=\frac{\sqrt{(b+c)^2-a^2}}{2}=\sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$　・・・・・・・・・・・・・⑮

この式⑮は，右図の場合の二等辺三角形の高さを求める式と同じである。
このことから，次のことがいえる。

B，Cを焦点とし，短軸の長さ$\sqrt{(b+c)^2-a^2}$，長軸の長さ $b+c$ の楕円上にある点AからBとCに引いた直線でできる三角形ABCにおいて，二つの等円に接するような直線AD（DはAを通る直線と長軸との交点）は一定であり，その長さは短軸の長さの半分である。



よって界斜の長さは

$$DA=\sqrt{\left(\frac{6+11}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}=4$$

答　4寸

上級問題は、初級問題と同じく『算法新書』からの出題ですが、これは、巻末の極形術(きょくぎょうじゅつ)の問題50題のうちの第12問です。「和算に挑戦」では、問題の図を各数値に近い図に変えて出題しました。

はじめに「極形術」について説明します。

和算で唯一とも言える体系化が図られた長谷川寛が創術した「極形術」の内容は、『算法新書』巻之五の附録の項に、詳しい解説とその応用問題50題が記載されています。最初にその方法が次のように述べられています。

> 極形術定則
> 　凡問題毎に各交商あり。交商を平均して極数とす　其象即極形なり　今極形に依て
> 　極数矩合を求め是を還原して交商矩合(常の精矩合を交商矩合と名づく)を得る
> 　起源を述る、其法左の如く

以下、交商矩合之図、還原之図、問題の解答と続き、後半では難問が解答されています。

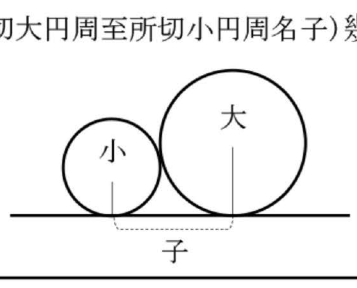
幾何の問題で、変化する定数の一方が増加すれば他方は減少するとき、これを交商といい定数の量は２個、３個、４個と様々な場合があります。

解答を求めるために与えられた定数を使用して表された方程式は、「交商矩合」と云われる方程式です。この交商矩合を求めることが困難な場合、簡単に解答する方法が極形術です。

その方法を要約すると、問題で使用されている多角形は正多角形に、楕円は円に変形した「極形之図（変形之図）」で得られた方程式、これを「極矩合」といい、この極矩合を変形した交商式を、解と係数の関係を利用して「還原」して、問題の解を得る術（方法）です。第６問を例として紹介します。これは、和算ではお馴染みの問題です。

第６問

> 今有線上如図載大小圓大径九寸小径四寸　問子(線上自所切大円周至所切小円周名子)幾何
> 答曰　　子　六寸
> 解曰　　略
> 術曰　　置大径乗小径開平方得子合問

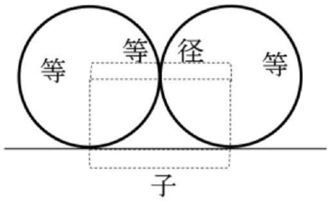


問題　　図で、大円(の直径)が９寸、小円(の直径)が４寸のとき、
　　　　両辺の接点の長さを求めなさい。

答　６寸

現代解としては、三平方の定理により解答されます。

極形術之図



以下に極形術の解答を示します。

最初に極形図を考えます。

極形図により　　子−等円径＝0　　これが極矩合です。

等円径をxとして、得られた式は　　$\underset{実}{子}+\underset{法}{〇}-\underset{廉}{x}=0$　これが交商式です。

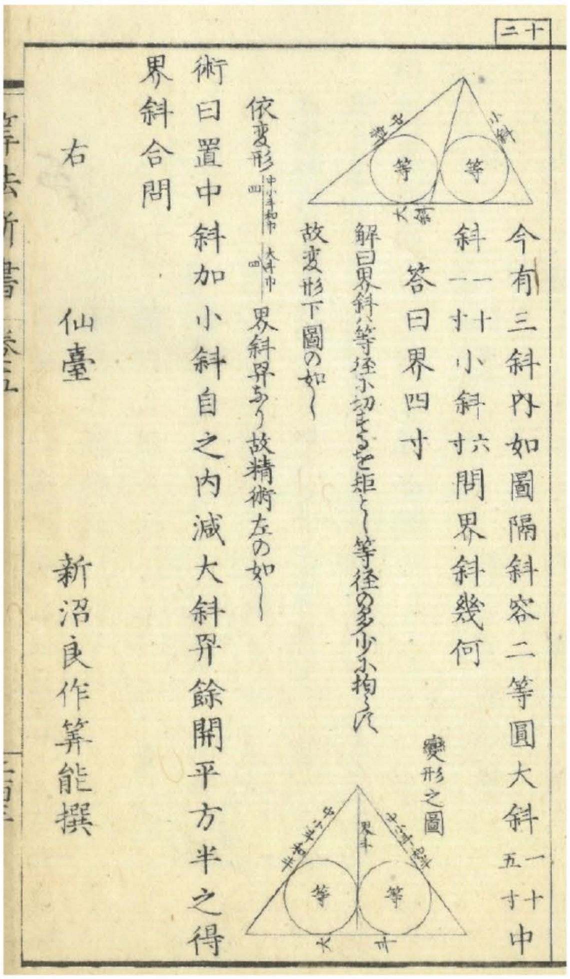
このとき、各項を実、法、廉と呼びます。

「還原の法」により、廉に$\sqrt{大径}\sqrt{小径}$ を代入して、子$-\sqrt{大径}\sqrt{小径}=0$

$$\therefore\quad 子=\sqrt{大径}\sqrt{小径}=\sqrt{9}\sqrt{4}=3\times 2=6寸$$

還原の方法は『算法新書』に詳しく述べられています。

では、上級問題の元となった第12問をみてみます。原文は次のとおりです。


十二

今有三斜内如圖隔斜容二等圓大斜一十五寸中斜一十一寸小斜六寸問界斜幾何

答曰界四寸

解曰界斜ハ等径ニ切するを矩とし等径の多少ニ拘らス

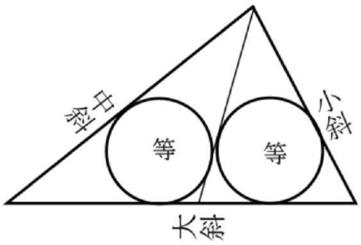
故変形下圖の如し

依変形 $\frac{中小斜和冪}{四}-\frac{大斜冪}{四}$ 界斜冪なり故精術左の如し

術曰置中斜加小斜自之内減大斜冪餘開平方半之得

界斜合問

右　仙臺　新沼良作算能撰



今有三斜内如図隔斜容二等円大斜一十五寸中斜一十一寸小斜六寸問界斜幾何

答曰　界四寸

解曰界斜ハ等径に切するを矩とし等径の多少に拘らず

故変形下図の如し

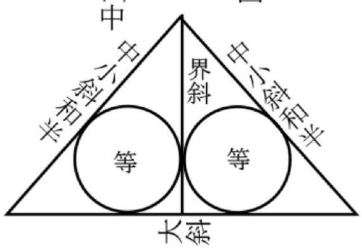
依変形 $\frac{中小斜和冪}{四}-\frac{大斜冪}{四}$ 界斜冪なり故精術左の如し

術曰置中斜加小斜自之内減大斜冪余開平方半之得

界斜合問

右　仙臺　新沼良作算能撰

変形之図



《原文の問題と答えの現代訳》

三角形に図のように界斜(隔斜)と二つの等円がある。大斜 15 寸、中斜 11 寸、小斜 6 寸の時、界斜は何寸か求めなさい。

※界斜は、図形を二つに分ける線。

答えて曰く　界　４寸

次に「解曰く」として、解き方を説明していますが、下のように三角形を二等辺三角形に変形して、次の式を導いています。(界は界斜、大は大斜、中は中斜、小は小斜を表します。)

変形の図において大斜と界斜は垂直なので

$$界^2=\left(\frac{中+小}{2}\right)^2-\left(\frac{大}{2}\right)^2$$

$$界^2=\frac{(中+小)^2}{4}-\frac{大^2}{4}$$

次に「術曰」として、上の式を平方に開くと界斜が出るとしています。

数字をあてはめて解くと、以下のように答えが導かれます。

$$16\frac{(11+6)^2}{4}-\frac{15^2}{4}=\frac{17^2}{4}-\frac{15^2}{4}$$

$$=\frac{(17+15)(17-15)}{4}$$

$$=\frac{32\times 2}{4}=\frac{64}{4}=16=界^2$$

$$\therefore 界=4$$

「解に曰く」の

$$界^2=\frac{(中+小)^2}{4}-\frac{大^2}{4}$$　　つまり、　$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{(中+小)^2-大^2}\right)-界\ =0$$

これは　極矩号です。

極形術では、これから交商式を作り還原して、交商矩合を作り解を求めます。

ところが第12問では、極矩合を使って直接解を求めています。

その理由は、この問題は、還原することなく交商矩号が出る、つまり極矩号と交商矩合が一致する特殊な問題であったため、普通の問題の極形術では重要な後半が記載されていないと考えます。

作題者の新沼良作算能は別に容術問題として、この解を得ていて、極数方程式(極矩合)が最終的な式になることは確認済であったと思われます。そのことが『算法新書』では記載されていません。ページ数の関係かと思われます。

それでも数学的には問題図と極形図は異なり、解が一致するには証明が必要であったと思われます。

一致する証明は、解答例３にＡＤの長さとして求め考察しています。参考としていただきたいものです。