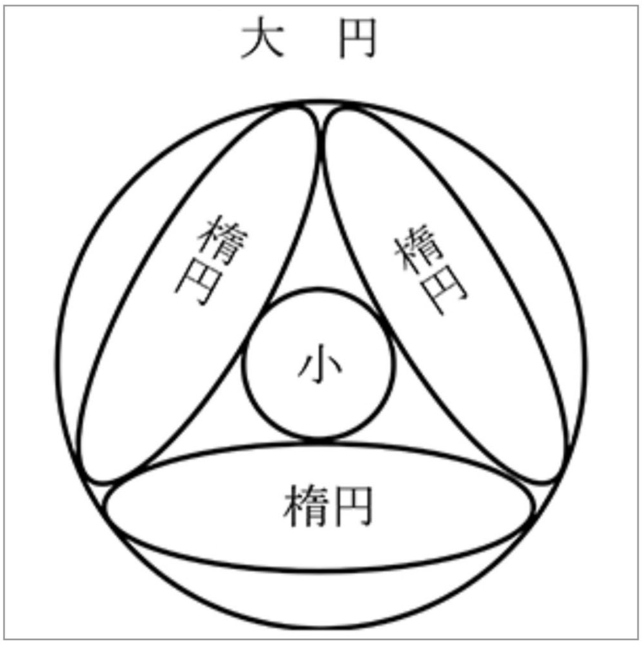
令和5年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・岩手県奥州市の胆沢城鎮守府八幡宮に弘化2年(1845)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように互いに外接する3個の合同な楕円がそれぞれ大円に内接し(2点で大円に接し)、また小円に外接しています。大円に内接する楕円の面積が最大となるとき、大円の直径を小円の直径を用いてあらわしなさい。



○審査員講評

弘化２年(1845)に奉納された算額からの出題でした。奉納者の家系は、代々優れた和算家や教育者を輩出しています。

内接する楕円の最大値の処理が課題であり、大半の答案は、奉納者、当会の解答と大きな差がありませんでした。それらを越えた優れた考察の一部を紹介します。考察では、優れた幾何学的な解析がなされていました。

はじめに、ある解答者の解を要約紹介します。

ア　半円（大円、小円）と一個の楕円を図示する。（対称性から一般性を失わない）

イ　楕円（短径ａ、長径ｂ）、小円（半径ｃ）大円（半径ｄ）、また原点を通る接線はｘ軸との角を考えて　$y = \sqrt{3}x$　と定まる。

ウ　大円と楕円の接する条件を求める。

エ　楕円と接線が一点で接する条件を求める。

オ　楕円の面積πａｂは既知として、これをｂの関数として表現して微分により最大値を決める。

カ　オから大円と小円の関係式を求める。

さらに、楕円の面積が最大のときの図を記載し、この図から接点、楕円の中心は星形六角形（籠目（かごめ））の図形上にあることまで言及されました。採点上の参考として活用させていただきました。

また、楕円の縮図と相似、そして三平方の定理により和算的な解法を示されました。他に幾何学考察を経て楕円の面積の最大値を導いた方もおります。

また別の解答者は、判別式の値の差による楕円の図その他を示し、最後に楕円の面積が最大になる図を示されました。またその他にも考察がありました。

多くの方が楕円の最大値を微分で処理されましたが、相加平均と相乗平均の関係から最大値を導いた解もありました。

繰り返しになりますが、解析的な解答に加え、異なるアプローチの幾何学的な深い考察が多く、心から敬意を表します。御来光のように感じる見事な答案に触れることができて幸せな時間でした。

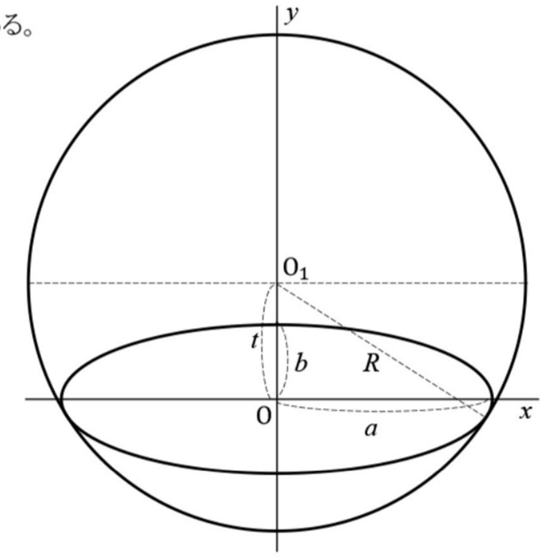
採点に戸惑い、悩み、感激する素晴らしい投稿を次年度もお待ち申し上げます。

解答例

【補助定理】

図のように，楕円 $\mathrm{O}(a,\ b)$ とそれに二点で接する外接円 $\mathrm{O_1}(R)$ がある。
その中心間の距離を t とすると，

$$\boldsymbol{t^2=\frac{(a^2-b^2)(R^2-a^2)}{a^2}}$$



【証明】

図のように，楕円の長軸，短軸をそれぞれ x 軸，y 軸とすると，

楕円の方程式： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………………………… ①

円の方程式　：　$x^2+(y-t)^2=R^2$ ……………… ②

②から x^2 を求めて①に代入して整理すると，

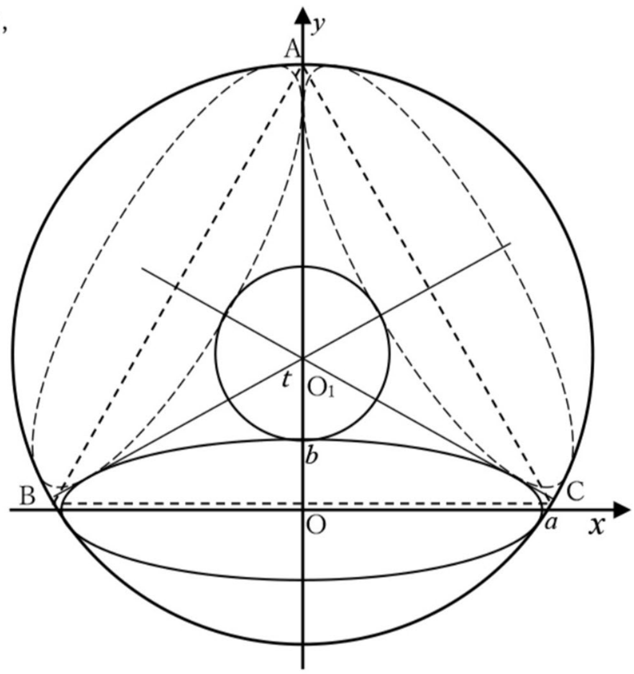
$$(a^2-b^2)y^2+2b^2ty-b^2(a^2-R^2+t^2)=0$$

$$(\text{判別式}/4)=b^4t^2+b^2(a^2-b^2)(b^2-R^2+t^2)=0$$

これから t^2 を求めると，

$$\boldsymbol{t^2=\frac{(a^2-b^2)(R^2-a^2)}{a^2}}$$

下の楕円の長軸を x 軸，短軸を y 軸とし，下の楕円を $\mathrm{O}(a,\ b)$，大円を $\mathrm{O_1}(R)$，小円を $\mathrm{O_1}(r)$ とし，$\mathrm{O_1}$ の y 座標を t とする。



楕円Oの方程式は　$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ……………… ③

図のように，頂点の１つがｙ軸上にあり，大円の周上に頂点をもつ正三角形ＡＢＣ（破線）を描く。

直線 $\mathrm{BO_1}$ の方程式は　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+t$ …………………… ④

④を③に代入すると

$$b^2x^2+a^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+t\right)^2=a^2b^2$$

$$3b^2x^2+a^2\left(x+\sqrt{3}t\right)^2=3a^2b^2$$

$$(a^2+3b^2)x^2+2\sqrt{3}a^2tx+3a^2(t^2-b^2)=0$$

$$\text{判別式}/4=\left(\sqrt{3}a^2t\right)^2-3a^2(a^2+3b^2)(t^2-b^2)=0$$

$$3a^4t^2-3a^2(a^2+3b^2)(t^2-b^2)=0$$

$$a^2t^2-(a^2+3b^2)(t^2-b^2)=0$$

$$a^2b^2-3b^2t^2+3b^4=0$$

両辺を $b^2(\neq 0)$ で割って　$a^2-3t^2+3b^2=0$

$t^2=\dfrac{1}{3}a^2+b^2$ ……………………………………………………… ⑤

補助定理を用いると

$a^2t^2-(a^2-b^2)(R^2-a^2)=0$ ……………………… ⑥

⑥に⑤を代入すると

$$a^2\left(\frac{1}{3}a^2+b^2\right)-(a^2-b^2)(R^2-a^2)=0$$

$$a^2(a^2+3b^2)-3(a^2-b^2)(R^2-a^2)=0$$

$$a^4-3a^2(R^2-a^2)+3b^2R^2=0$$

$$3b^2R^2+4a^4-3a^2R^2=0$$

$$3b^2R^2=3a^2R^2-4a^4$$

$b^2=a^2-\dfrac{4a^4}{3R^2}$ ……………………………………………………… ⑦

したがって⑦より，楕円の面積を b を用いずに表すと　$\pi ab=\pi\sqrt{a^2b^2}=\pi\sqrt{a^2\left(a^2-\dfrac{4a^4}{3R^2}\right)}=\pi\sqrt{a^4-\dfrac{4a^6}{3R^2}}$

楕円の面積が最大となるときは，根号の中が最大となるときである。

$\mathrm{F}(a)=a^4-\dfrac{4a^6}{3R^2}$ とする。

$\mathrm{F}'(a)=4a^3-\dfrac{8a^5}{R^2}=-\dfrac{8a^3}{R^2}\left(a^2-\dfrac{R^2}{2}\right)=-\dfrac{8a^3}{R^2}\left(a+\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$

$0<a<\dfrac{R}{\sqrt{2}}$　のとき　$\mathrm{F}'(a)>0$

$a=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$　のとき　$\mathrm{F}'(a)=0$

$\dfrac{R}{\sqrt{2}}<a$　のとき　$\mathrm{F}'(a)<0$

であるから　$a=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$　のとき　$\mathrm{F}\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$ が最大となる。

$a=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$　のとき⑦より

$$b^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{4\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^4}{3R^2}=\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{3}=\frac{R^2}{6}$$

$b,\ R>0$ より　$b=\dfrac{R}{\sqrt{6}}$ ……………………………………… ⑧

$a=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$　のとき⑤⑧より

$$t^2=\frac{1}{3}\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{R^2}{6}+\frac{R^2}{6}=\frac{R^2}{3}$$

$t,\ R>0$ より　$t=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ ……………………………………… ⑨

⑧⑨を用いると　$r=t-b=\dfrac{R}{\sqrt{3}}-\dfrac{R}{\sqrt{6}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)R=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}R$

これより　$R=\dfrac{\sqrt{6}r}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{6}(\sqrt{2}+1)r=(2\sqrt{3}+\sqrt{6})r$

$2R=(2\sqrt{3}+\sqrt{6})\times 2r$

したがって　(大円の直径) $=(2\sqrt{3}+\sqrt{6})\times$ (小円の直径) ……………………………………………………… **(答)**

※術文では　(大円の直径) $=\sqrt{\sqrt{288}+18}\times$ (小円の直径)　となっている。二重根号をはずせば,

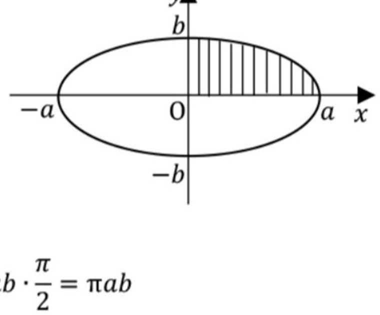
$$\sqrt{\sqrt{288}+18}=\sqrt{2\sqrt{72}+18}=\sqrt{2\sqrt{12\times 6}+(12+6)}=\sqrt{12}+\sqrt{6}=2\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

【参考１】

楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$　の囲む面積をＳとすると，$\mathrm{S}=\pi ab$　である。

【証明】

楕円の面積Ｓは，第１象限の部分の面積の４倍であり，第１象限では $y\geqq 0$ だから,



$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad 0\leqq x\leqq a$

したがって，$\mathrm{S}=4\cdot\dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x=a\sin\theta$ とおくと，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$，$dx=a\cos\theta\,d\theta$,

$x=0$ のとき $\theta=0$,　$x=a$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\mathrm{S}=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta d\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta==2ab\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

【別証】

楕円の第１象限と第２象限の部分の曲線は

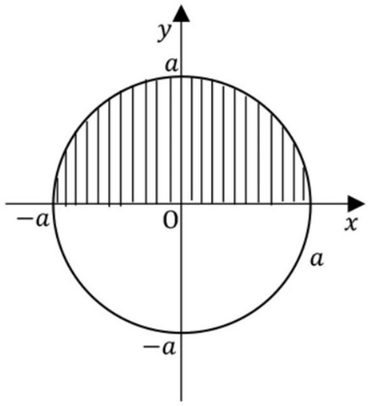
$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,　　$-a \leqq x \leqq a$　だから

$\mathrm{S}=2\cdot\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ の上半分を表しているから，

$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi a^2$

したがって，$\mathrm{S}=2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=\pi ab$



【参考２】

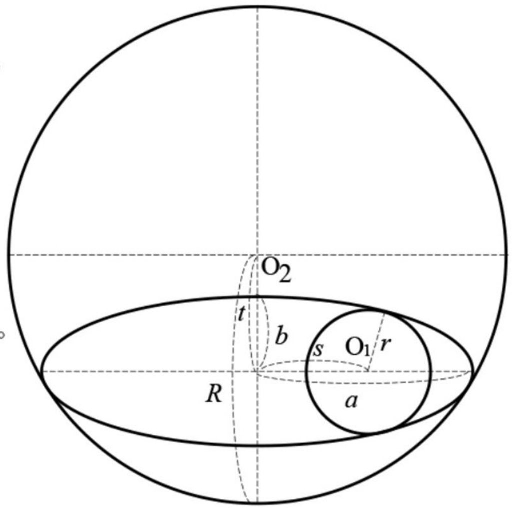
１．右図のように楕円 $\mathrm{O}(a,\ b)$ とそれに二点で接する内接円 $\mathrm{O}_1(r)$ がある。
その中心間の距離 s とすると，

$$\boldsymbol{s^2=\frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}}$$

（これは算法助術 項目 84 にあたる。）

２．図３のように楕円 $\mathrm{O}(a,\ b)$ とそれに二点で接する外接円 $\mathrm{O}_2(R)$ がある。
その中心間の距離を t とすると，

$$\boldsymbol{t^2=\frac{(a^2-b^2)(R^2-a^2)}{a^2}}$$



岩手県奥州市水沢の胆沢城鎮守府八幡宮に弘化２年(1845) １０月１５日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額には１３題の問題がありますが、この問題は３番目、千葉治三郎胤定門人の石川伝之助保良によるものです。

石川伝之介(1813-1877)は、江戸時代後期に一関藩の下黒沢村(現一関市)で生まれました。伝之助の奉納した算額はこのほかにも一関市、平泉町内に３面残されています。師の千葉治三郎は一関の和算家千葉胤秀の高弟安部(阿部)保定の門人です。なお、伝之助の孫幸平は、祖父の影響を受けて和算を学び関流１０伝の免許を得て、昭和６年(1931)に「関流数学交友会」を結成して和算の研究と普及に尽力するなど、最末期の和算家の活動の中心となっています。

明治時代に入った算額には、「至多」と表現される最大値を求める問題が奉納されていますが、これはその前の幕末期の算額です。

戊辰戦争の刈羽野の戦いで戦死した、関流８伝千葉胤英の長男、量七の解義書が石川家に保存されていました（現在は一関市博物館所蔵)。その解義を現代的に証明して和算の解答を紹介します。

【問題】

大円がある。図のように、面積が至多（最大）な楕円が３個と小円１個が外接しながら大円に内接している。
小円の直径が与えられたとき、大円の直径を求めなさい。

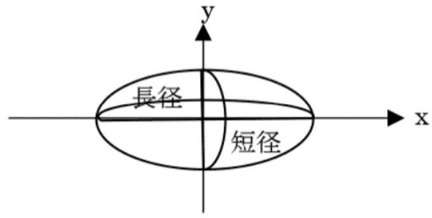
【答】　大円径＝$\sqrt{\sqrt{288}+18}$×小円径

【解答】

側円積＝円積率・長径・短径・・・・・・(１)

証明

側円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とする。



$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$　　求める側円積をSとすると

$\frac{1}{2}S=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$=2\frac{b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}$　ここで $x=a\sin\theta$ とおいて置換積分すればよいが、

この定積分は半径aの円の面積の$\frac{1}{4}$なので、$\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{4}\pi a^2$

∴　S＝側円積＝$2\times2\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2 a^2=\frac{1}{4}\pi$（２ａ）（２ｂ）＝円積率・長径・短径

短径＝$\frac{側円積}{円積率・長径}$・・・・・・・（２）

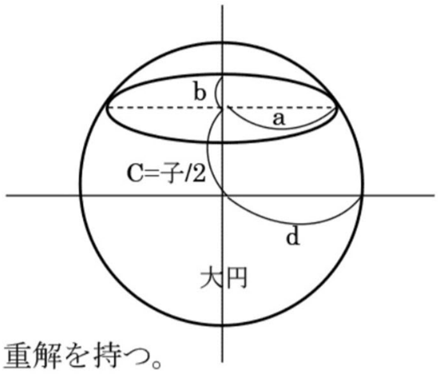
証明

これはたんなる（１）の変形である。

$\left(長径^2-短径^2\right)\left(大円径^2-長径^2\right)=子^2\cdot長径^2$・・・・（３）

証明

子は大円と側円の中心との距離である。



$a=\frac{長径}{2}$、$b=\frac{短径}{2}$、$d=\frac{大円径}{2}$　とする。

大円　　$x^2+y^2=d^2$　　・・・ア　　と

側円　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}=1$　・・・イ　は接するので、重解を持つ。

イは　　$b^2x^2+a^2(y-c)^2=a^2b^2$　　アを代入して整理すると

$\left(a^2-b^2\right)y^2-2a^2cy+\left(b^2d^2+a^2c^2-a^2b^2\right)=0$　判別式＝０

$a^4c^2-\left(a^2-b^2\right)\left(b^2d^2+a^2c^2-a^2b^2\right)=0$　　整理すると

$a^2c^2=\left(a^2-b^2\right)\left(d^2-a^2\right)$　　両辺を１６倍して

$$(2a)^2(2c)^2=\left\{(2a)^2-(2b)^2\right\}\left\{(2d)^2-(2a)^2\right\}$$

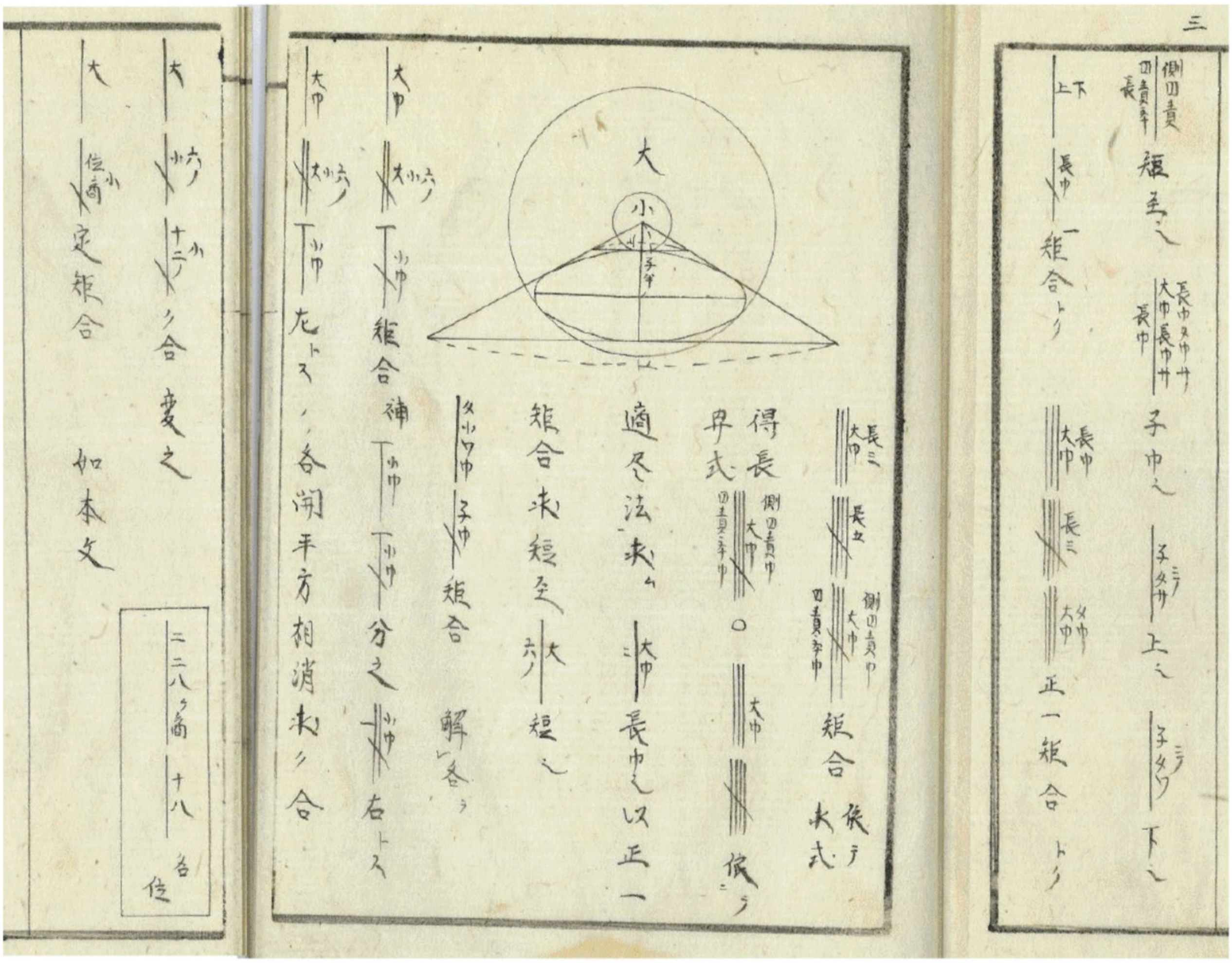
右図で台形の下底$=\sqrt{3}\,(子-短径)$・・・・・（4）

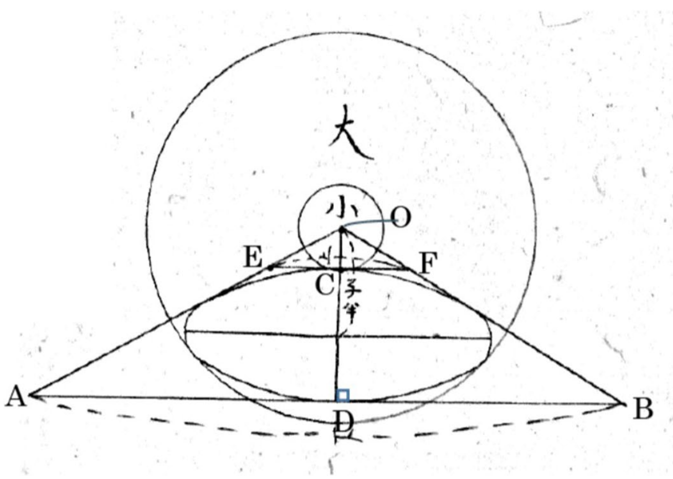
上底$=\sqrt{3}\,(子+短径)$・・・・・（5）

証明

大円に合同な側円が３個内接しているので、大円の中心を通るので２接線のなす角は120°である。

下の図で





$$OC=\frac{子}{2}-\frac{短径}{2}\qquad EC:OC=\sqrt{3}:1$$

$$\therefore\quad 上底=2\times\sqrt{3}\left(\frac{子}{2}-\frac{短径}{2}\right)=\sqrt{3}\,(子-短径)$$

同様に　下底$=\sqrt{3}\,(子-短径)$

$$\boxed{\text{上底}\times\text{下底}=\text{長径}^2 \cdots\cdots(6)}$$

証明

側円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とする。　　上底、下底、側円の長軸は平行である。

側円上の任意の点P$(p、q)$における接線の方程式は

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1$$

図の点Qのx座標は、$y=b$ として $\frac{px}{a^2}+\frac{bq}{b^2}=1$ より　$x=\frac{a^2}{p}\left(1-\frac{q}{b}\right)$

Rのx座標は、$y=-b$ として 同様に　$x=\frac{a^2}{p}\left(1+\frac{q}{b}\right)$

$$\therefore\quad \text{上}=2\cdot\frac{a^2}{p}\left(1-\frac{q}{b}\right)\qquad \text{下}=2\cdot\frac{a^2}{p}\left(1+\frac{q}{b}\right)$$

$$\text{上}\cdot\text{下}=4\frac{a^4}{p^2}\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right)$$ ここで、点Pは楕円上の点なので、

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1\qquad \frac{p^2}{a^2}=1-\frac{q^2}{b^2}$$ これを代入して、

$$\text{上}\cdot\text{下}=4a^2=(2a)^2=\text{長径}^2$$

$$\boxed{3\text{大円径}^2\cdot\text{長径}^2-3\text{大円径}^2\cdot\text{短径}^2-4\text{長径}^2=0\cdots\cdots(7)}$$

証明

④と⑤を⑥に代入すればよい。

$$\boxed{3\text{大円径}^2\cdot\text{長径}^4-3\text{大円径}^2\cdot\frac{\text{側円積}^2}{\text{円積率}^2}-4\text{長径}^6=0\cdots\cdots(8)}$$

証明

②を⑦に代入すればよい。

$$\boxed{3\text{大円径}^2\cdot\text{長径}^3-3\frac{\text{大円径}^2}{\text{円積率}^2}\frac{d}{d\,\text{長径}}\text{側円積}^2-4\text{長径}^6=0\cdots\cdots\cdot(9)}$$

証明１

大円は定数なので、大円径は一定である。極数術（冪関数の微分）により

⑨は成立つ。

∵　　至多（最大）である側円面積に対して

$$\frac{d}{d(\text{長径})}(\text{側円積})=0\qquad \text{ゆえに}\quad \frac{d}{d(\text{長径})}\text{側円積}^2=2\text{側円積}\frac{d(\text{側円積})}{(\text{長径})}=0$$

$$\therefore\text{大円径}^2-2\text{長径}^2=0\qquad\qquad \text{長径}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{大円径}\cdots\cdots(10)$$

証明２

$長径^2 = x$　　　⑨の左辺を $f(x)$ とする。

$$f(x)=3大円径^2 x^2-\frac{大円径^2}{円積率^2}\frac{d}{d長径}側円積^2-4x^3$$

$$f'(x)=6大円径^2\cdot x-12x^2=-6x\left(2x-大円径^2\right)$$

$f'(x)=0$ より $x=\frac{大円径^2}{2}$　　∴　$長径^2=\frac{大円径^2}{2}$

∴　$長径=\frac{1}{\sqrt{2}}大円径$

$\frac{側円積}{円積率}=\frac{1}{2\sqrt{3}}大円径^2$・・・・・・・（１１）

証明

⑩を⑧に代入して　$3大円径^2\cdot\frac{1}{4}大円径^4-3大円径^2\cdot\frac{側円積^2}{円積率^2}-\frac{1}{8}大円径^6=0$

$\frac{側円積^2}{円積率^2}=\frac{1}{12}大円径^4$　　∴　$\frac{側円積}{円積率}=\frac{1}{2\sqrt{3}}大円径^2$

$短径=\frac{1}{\sqrt{6}}大円径$・・・・・・・（１２）

証明

②は　$短径=\frac{側円積}{円積率\cdot長径}$　これに⑪を代入して　$短径=\frac{大円径^2}{2\sqrt{3}長径}$

さらに上式に　⑩の　$長径=\frac{1}{\sqrt{2}}大円径$を代入して　$短径=\frac{1}{\sqrt{6}}大円径$

短径＋小円径＝子・・・・・（１３）

証明

図より明らか

$短径+小径=\frac{1}{\sqrt{3}}大円径$・・・・・（１４）

証明

（１４）に（１２）の短径を代入して$\frac{1}{\sqrt{6}}大円径+小円径=\frac{1}{\sqrt{3}}大円径$

$$小円径=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)大円径=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{6}}大円径$$

$$\therefore \quad 大円径=\frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}-1\right)}小円径=\left(\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)小円径$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)^2}小円径=\sqrt{\sqrt{288}+18}小円径$$

〈補足〉

１．最終的な答えを二重根号ひとつにまとめている。これは和算家の慣習のようである。一部投稿者もこの形を最終的な答としていた。

２．楕円は円の縮小拡大である。楕円の面積公式πａｂは関孝和が「七部書」の「側円がある。長径３尺、短径１尺３寸、面積を問う」で証明している。

３．至多（極大と最大値の場合がある）について

和算では定積分の内容体積は級数展開を使用した「区分求積」で求められる。

微分の内容は一関藩では算法新書の巻之三の交商と変商の中に、その他の和算書にも「適尽法」として記載されている。また明治期の算額にも至多の問題が奉納されている。解義は一部にのみ記入されている。

４．和算百科より一部引用。適尽方級数は関孝和の「開方飜變之法（かいほうほんへんのほう）」に記載された。

方程式　$+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n=0\cdots\cdots(1)$

$a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}=0\cdots\cdots(2)$ を使用する。

（２）の左辺は（１）の左辺を部分した式である。

（１）式と（２）式から求めた終結式を適尽方級数といい、ｘを消去した結果たすとして判別式に相当するものを得る。これを使用して方程式が解を持つとき、係数の極値を求めている。グラフがないので、変化を判別式で探っている。

５． 幕末期には、洋算も一部では知られていたと思われるが、和算は級数で無限の概念を取扱ながら、微分公式

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$　がないので和算家では「至多」の問題は難問であったと推測する。今後の上級問題のなかで詳細を報告したい。