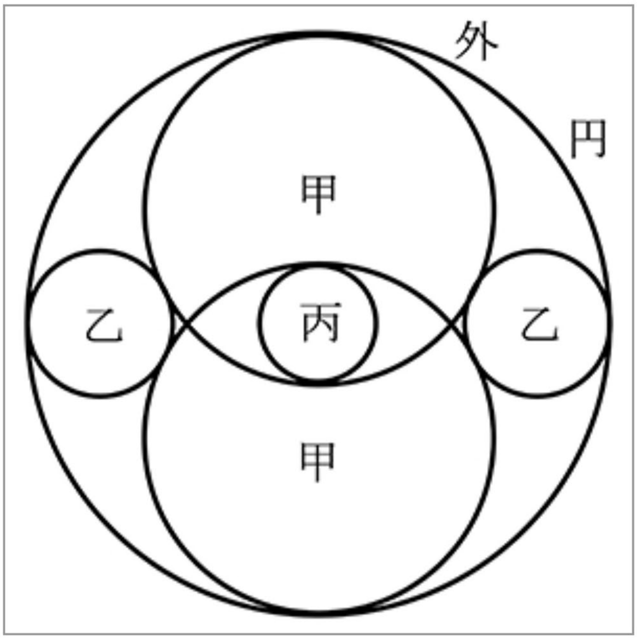
令和5年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県奥州市の玉崎駒形神社に弘化5年(1848)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、交わる2つの甲円がそれぞれ外円に内接しています。2つの乙円はそれぞれ外円に内接し2つの甲円に外接しています。
丙円は2つの甲円に内接し、丙円の中心と外円の中心は一致します。
甲円の直径が12寸、丙円の直径が4寸のとき、乙円の直径は何寸ですか。



審査員講評

岩手には「南部片富士」として、多くの人々に親しまれている秀麗な山があります。百名山の一つである「岩手山」の愛称です。標高もさることながら、裾までの流れるような形は目にする人々に、四季折々深い感動を与えてくれます。ほぼ独立峰なので、頂きに至る道はいく筋もあります。しかし、ゴンドラや車道はなく、一度は登頂したいという強い願いと、ものすごい健脚を求められる山でもあります。

「和算に挑戦」問題で提示される図形も、見事な形をしたものが多く、作題者の力を強く感じさせられるものが多くあります。問いに対する解を目指す姿勢や努力は、高い山のピークを目指すそれと同じであるように思います。

毎回寄せられた解を整理させてもらう立場としましても、いち早くいろんなすばらしい解に接することができます。いろんな解へのアプローチに出会うことは刺激的であり感激的です。

さて、今回の中級問題も見事な図形構成で、挑戦意欲をそそられるものでした。

具体的に、解のすすめ方は次の２つに大別できました。

① 「三平方の定理」を中心に解を構成する。

② 提示された数値を最初から図に記入し、関係を見つける。

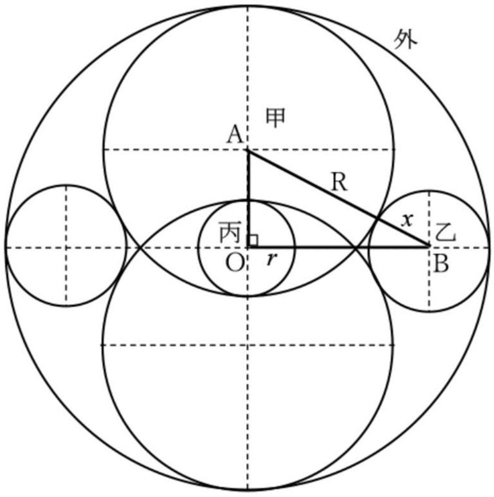
「三平方の定理」は、江戸時代にその使用がかなり普及していたようで、解は基本的論理構成そのものでした。和算の解の進め方としては、全体像が把握できてから具体的数値を代入しないと解けないものが多いのが通例ですが、今回は早目に数値を利用した方が、見通しが立ち容易だったようです。

甲乙丙…などで和算風にすすめた方、平面図形にかかわる「方べきの定理」に関連づけた解もありました。

図が複雑なわりに解は簡単で、中、上級間に内容的に大きな較差があったという苦言もありました。中高生も対象という事で毎回の問題選択には、裏方としてもかなりの苦心、努力を強いられている実態もあります。対称性を利用し、図をシンプルにして対応すれば、中学生レベルの知識でも対応できるものであるというのが今回の中級問題の特色でもありました。

取り組みやすい内容の問題でも、解に至る地図は、微妙に違う足跡を描いておりました。やさしい問題でも、大変楽しく解きましたという多くの人々の感想も寄せられております。ありがとうございました。

○解答例



上の甲円をA(R)，右の乙円をB(x)，丙円をO(r)とする。

$(\text{外円の半径}) = (\text{甲円の直径}) - (\text{丙円の半径}) = 2\mathrm{R} - r$ ………… ①

$\mathrm{OA} = (\text{甲円の半径}) - (\text{丙円の半径}) = \mathrm{R} - r$ ………… ②

①を用いると

$\mathrm{OB} = (\text{外円の半径}) - (\text{乙円の半径}) = (2\mathrm{R} - r) - x$ ………… ③

$\mathrm{AB} = (\text{甲円の半径}) + (\text{乙円の半径}) = \mathrm{R} + x$ ………… ④

直角三角形AOBに三平方の定理を用いると，

$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = \mathrm{AB}^2$

②③④より

$(\mathrm{R} - r)^2 + \{(2\mathrm{R} - r) - x\}^2 = (\mathrm{R} + x)^2$

$\mathrm{R}^2 - 2r\mathrm{R} + r^2 + 4\mathrm{R}^2 - 4r\mathrm{R} + r^2 - (4\mathrm{R} - 2r)x + x^2 = \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}x + x^2$

$4\mathrm{R}^2 - 6r\mathrm{R} + 2r^2 - (6\mathrm{R} - 2r)x = 0$

$2\mathrm{R}^2 - 3r\mathrm{R} + r^2 - (3\mathrm{R} - r)x = 0$

$(3\mathrm{R} - r)x = 2\mathrm{R}^2 - 3r\mathrm{R} + r^2$

$3\mathrm{R} - r \neq 0$ より

$x = \dfrac{2\mathrm{R}^2 - 3r\mathrm{R} + r^2}{3\mathrm{R} - r} = \dfrac{2 \times 6^2 - 3 \times 2 \times 6 + 2^2}{3 \times 6 - 2} = \dfrac{72 - 36 + 4}{16} = \dfrac{40}{16} = \dfrac{5}{2}$ （$\mathrm{R} = 6$，$r = 2$ を代入した。）

$(\text{乙円の直径}) = 2x = 5$

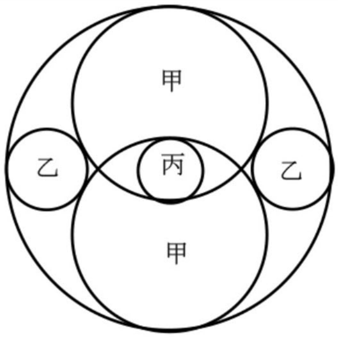
答　5（寸）

参考　外円の直径 20 寸，　甲円の直径 12 寸，　乙円の直径 5 寸，　丙円の直径 4 寸

直角三角形 AOB は 4 ： 7.5 ： 8.5 ⇒ 8 ： 15 ： 17 の直角三角形になる。

○解説

中級問題は、岩手県奥州市江刺の玉崎駒形神社に弘化５年(1848) ３月１７日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額には５題の問題がありますが、その４番目の問題です。



外円ノ内エ甲乙円各二個ト丙円一個ヲ容レル
アリ甲径一十二寸丙径四寸乙径何程ト問フ
答曰乙径五寸
術曰天元ノ一ヲ立乙径トス甲径ヲ加エル弦二
段トス是ヲ自シ二弦冪四段トス左寄ス甲径ヲ
列シ内丙径減ジ余勾二段トス是ヲ自シテ勾冪
四段トス甲径ヲ倍シ内乙径及丙径減余股二段
ト是ヲ自シテ股冪四段トス左ニ寄ス相消シテ
帰除式得法ヲ以テ実ヲ除キ□ヲ合問ニ

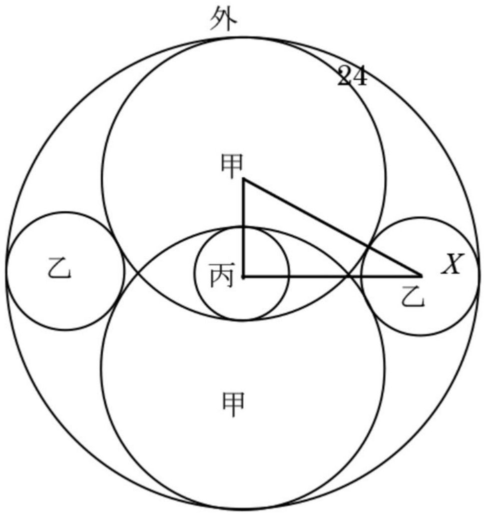
算額では、問題文があり、「答曰」として答え５寸、その後に「術曰」として解き方が書かれています。

現代的に式に直すと、次の頁のようになります。

術文で使用している、和算用語を以下にあげますので参考にして下さい。

- **天元ノ一ヲ立て**　「天元ノ一」とは未知数のこと。「天元ノ一ヲ立テ」は、未知数を x とおくと同じ意味。
- **二段**　２倍、四段は４倍
- **冪**(べき)　２乗
- **勾股弦**(こうこげん)　直角三角形のことで、それぞれ「勾」はその短辺、「股」は長辺、「弦」は斜辺のこと。
- **左ニ寄ス**　最初に得られた式を、ひとまず置いておく
- **帰除式**　一次方程式

【術文】



乙径を未知数　Xとする

X+甲径 は 弦×２ である。
X+甲径 の２乗は 弦の２乗の４倍である。左に寄す。

甲径−丙径 は 勾×２ である。
甲径−丙径の２乗は 勾の２乗の４倍である。

甲径×２−X−丙径は　股×２である。
甲径×２−X−丙径　の２乗は　股の２乗の４倍である。
これに勾の２乗の４倍を加える。左に寄すと相消す。

$$(\text{甲径}\times 2-X-\text{丙径})^2+(\text{甲径}-\text{丙径})^2-(X+\text{甲径})^2=0$$
$$(\text{甲径}\times 3-\text{丙径})\times X-\left(\text{甲径}^2\times 2-\text{甲径}\times\text{丙径}\times 3+\text{丙径}^2\right)=0$$

$$X=\frac{\text{甲径}^2\times 2-\text{甲径}\times\text{丙径}\times 3+\text{丙径}^2}{\text{甲径}\times 3-\text{丙径}}$$

ここで，甲径 $=12$ 寸，丙径 $=4$ 寸 を代入すると，$X=5$ 寸 となる。