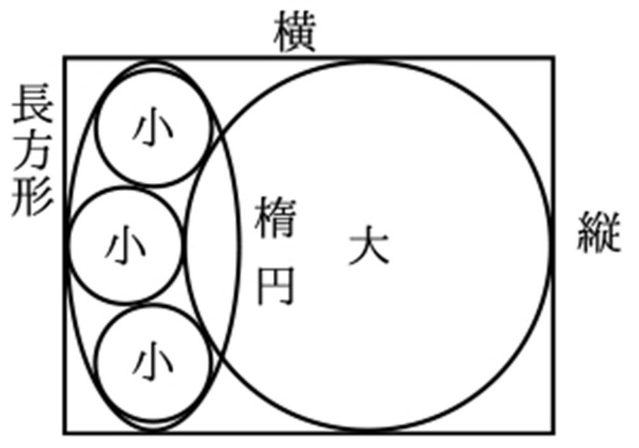
令和6年度出題問題③［上級問題］(高校生・一般向き)

・岩手県一関市の大門神社に慶応2年(1866)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、大円と楕円がそれぞれ長方形の3辺に接しています。
連結する3個の小円は、それぞれ大円に外接し、楕円に内接しています。両端の小円は楕円に2点で接しています。
長方形の縦の長さが3寸のとき、横の長さを求めなさい。



審査員講評

令和７年は千葉胤秀(1775～1849)生誕２５０年にあたります。上級問題は、千葉胤秀旧宅(一関市指定有形文化財)がある一関市花泉町の大門神社の算額の問題をアレンジして出題しました。応募数は、過去１０年間では３番目に多い数でした。たくさんの応募ありがとうございました。感想文の中で、中級問題も上級問題も長方形の縦・横、円の直径がそれぞれ３寸・４寸、１寸になるという事に言及された方がいました。

問題の図は、上下対称になっていますが、楕円の長軸が横になるように、右回りに 90° 回転し楕円が上になるように(または左回りに 90° 回転し楕円が下になるように)工夫された解答がありました。

『算法助術』の項目８４を使った解答が見られ、判別式を用いた証明が多く、円柱の斜断による証明も１名いました。項目８４は楕円の問題でよく使われる和算公式です(右上枠内参照)。和算解説で原文を紹介しました。令和５年度、３年度、２年度の審査員講評や岩手県和算研究会の解答例の中で扱っています(一関市博物館 HP をご覧ください)。過去の解答集が参考になりましたという内容の感想もあり、熱心に調べている方がたくさんいることがわかります。

長軸，短軸の長さがそれぞれ２a，２b の楕円に２点で接する内接円の半径を r とすると，

$$\left(\text{中心間の距離}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$

また、小円の半径を、楕円の長半径、短半径を用いて表すために、右下枠内の式を作った解答もみられました。そして、図の中にある相似な図形に着眼し、右上枠内の式と右下枠内の式を用いて解答したものがありました。余弦定理、２倍角の公式などの三角関数を用いたり、小円の半径についての５次方程式を求めて、因数定理を用いて因数分解する方法もありました。

長軸，短軸の長さがそれぞれ２a，２ｂの楕円に，連結する３小円（半径ｒ）が内接し，両端の２小円が２点で楕円に接するとき，

$$r = \frac{a^2 b}{a^2 + 2b^2}$$

独特な解法としては、次のような方法があり、勉強になりました。

・相加平均、相乗平均、調和平均を用いる。

・３小円が連結していない一般の場合を考察し、連結する特殊な場合を考察する。

・円が楕円に内接する条件として、２点で接する場合、１点で接する場合に分けて考察する。

解答の方針を誤ると計算量が多くなる傾向にあります。誤答としては、小円の中心が縦にまっすぐに並んでいると勘違いした解答がありました。根拠を示さずに小円の直径を１寸とし、横の長さを４寸とした解答は正解とはしませんでした。

『和算に挑戦』は２３回になります。第１回(平成１４年度)から連続で、素晴らしい解答を提出されている方がいます。また、熱心に複数回提出されている方の名前を見て大変うれしい気持ちになります。初めて参加される方にも和算文化に触れて頂けるよう岩手県の算額や、和算書から出題いたします。

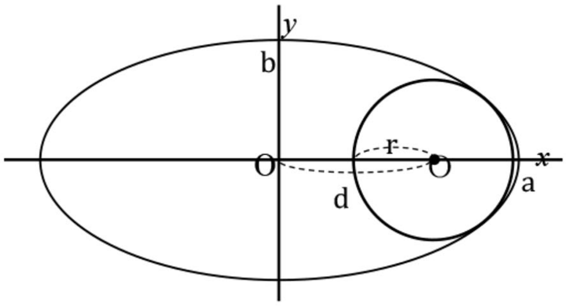
○解答例

解答例１

【補助定理１】 これは 算法助術 項目 84 にあたる。

右図のように楕円 O(a，b)とそれに２点で接する内接円 O_1(r)がある。

その中心間の距離を d とすると，



$$OO_1{}^2 = d^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$

〈証明〉

楕円： $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ……………………………………… ①

円： $(x - d)^2 + y^2 = r^2$ ……………………………………… ②

②から y^2を求めて①に代入して整理すると

$b^2x^2 + a^2\{r^2 - (x - d)^2\} = a^2b^2$

$b^2x^2 + a^2\{r^2 - x^2 + 2dx - d^2\} = a^2b^2$

$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2dx + a^2(b^2 - r^2 + d^2) = 0$

楕円と円が接するので

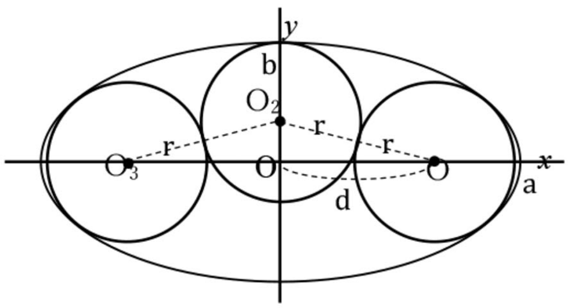
$(\text{判別式}/4) = a^4d^2 - a^2\,(a^2 - b^2)(b^2 - r^2 + d^2) = 0$

a^2で約して整理すると

$OO_1{}^2 = d^2 = \dfrac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$ **〈証明終り〉**

【補助定理２】

右図のように，半径 r の連結する３個の円 O_1，O_2，O_3 が楕円 O(a，b)に内接している。O_1，O_3 は楕円に２点で接している。このとき



$$r = \frac{a^2b}{a^2 + 2b^2}$$

〈証明〉

直角三角形 O_1 O O_2 に三平方の定理を用いると，

$O_1O_2{}^2 = OO_2{}^2 + OO_1{}^2$

$(2r)^2 = (b - r)^2 + d^2$

補助定理１を用いると

$$(2r)^2 = (b - r)^2 + \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$

$b^2\{(2r)^2 - (b - r)^2\} = (a^2 - b^2)(b^2 - r^2)$

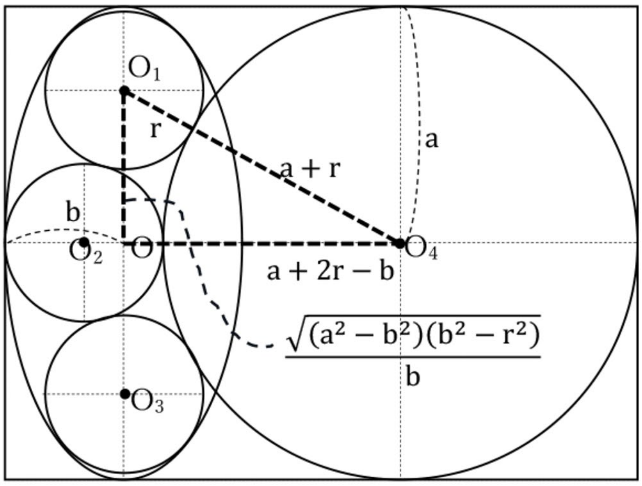
$3b^2r^2 - b^4 + 2b^3r = a^2b^2 - a^2r^2 - b^4 + b^2r^2$

$$(a^2+2b^2)r^2+2b^3r-a^2b^2=0$$

$$(r+b)\{(a^2+2b^2)r-a^2b\}=0$$

$$(a^2+2b^2)r-a^2b=0 \quad (\because\ r+b>0\ )$$

したがって　$r=\dfrac{a^2b}{a^2+2b^2}$　**〈証明終り〉**



右図のように，長方形の３辺に接する楕円の中心を O，とし，長軸，短軸の長さをそれぞれ２a，２b とする。

この楕円に内接する３個の小円を $O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$とし，長方形の３辺に接する大円を $O_4(a)$とする。

直角三角形 O_1OO_4 に三平方の定理を用いると，

$$O_1O_4{}^2=OO_4{}^2+OO_1{}^2$$

OO_1に補助定理１を用いると

$$(a+r)^2=(a+2r-b)^2+\frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$$

$$b^2\{(a+r)^2-(a+2r-b)^2\}=(a^2-b^2)(b^2-r^2)$$

$$b^2(2a+3r-b)(b-r)=(a^2-b^2)(b^2-r^2)$$

両辺を $b-r\neq 0$ で割ると

$$b^2(2a+3r-b)=(a^2-b^2)(b+r)$$

$$2ab^2+3b^2r-b^3-a^2b-a^2r+b^3+b^2r=0$$

$$2ab^2+4b^2r-a^2b-a^2r=0$$

$$(4b^2-a^2)r+(2b-a)ab$$

$$(2b-a)\{(2b+a)r+ab\}=0$$

$(a+2b)r+ab\neq 0$ より

$$2b-a=0$$

$$a=2b \quad \left(b=\frac{a}{2}\right) \qquad (※)$$

補助定理２と(※)より

$$r=\frac{a^2b}{a^2+2b^2}=\frac{a^2\cdot\frac{a}{2}}{a^2+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{3}$$

したがって

$$(横の長さ)=\ 2a+2r\ =\ 2a+2\times\frac{a}{3}\ =\frac{8}{3}a$$

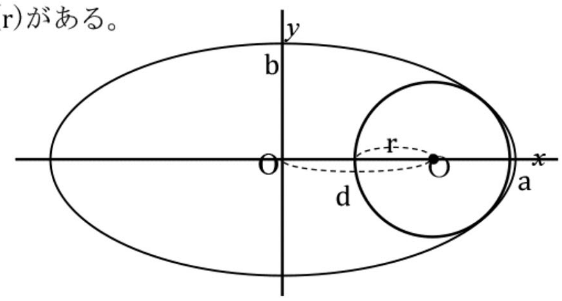
$$=\frac{4}{3}\times 2a\ =\frac{4}{3}\times(縦の長さ)\ =\frac{4}{3}\times 3\ =4$$

4寸

【補助定理】　（これは 算法助術 項目 84 にあたる。）

右図のように楕円 O(a，b)とそれに２点で接する内接円 O_1(r)がある。

その中心間の距離を d とすると，



$$OO_1{}^2 = d^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$$

〈証明〉

楕円： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………………………… ①

円： $(x-d)^2+y^2=r^2$ ……………………………… ②

②から y^2を求めて①に代入して整理すると

$b^2x^2+a^2\{r^2-(x-d)^2\}=a^2b^2$

$b^2x^2+a^2\{r^2-x^2+2dx-d^2\}=a^2b^2$

$(a^2-b^2)x^2-2a^2dx+a^2(b^2-r^2+d^2)=0$

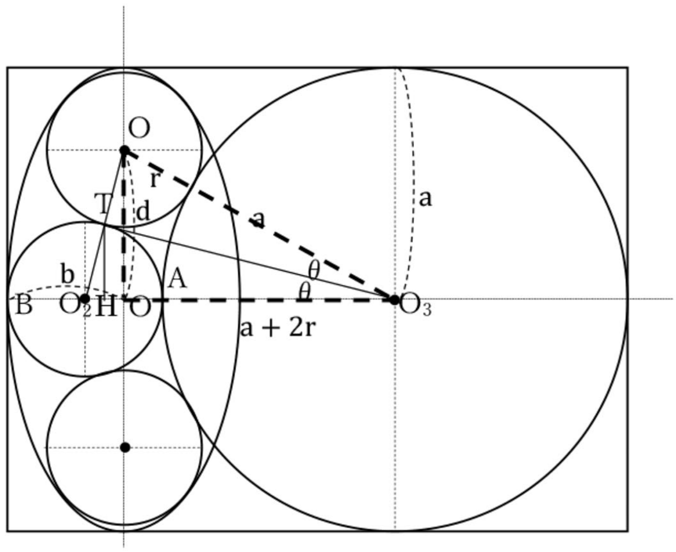
楕円と円が接するので

$(判別式/4)=a^4d^2-a^2\,(a^2-b^2)(b^2-r^2+d^2)=0$

a^2で約して整理すると

$$OO_1{}^2 = d^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}{b^2}$$ …………………… ③　**〈証明終り〉**

図のように，楕円の中心をO，長軸の長さを２a，短軸の長さを２b とする。小円　O_1(r)　と，小円　O_2(r)　の接点をＴ，ＴからＯO_2に下した垂線の足をＨとする。大円をO_3(r)とする。



ＯO_1　＝　d とする。

O_3O_1 ＝　O_3O_2 ＝　a　＋　r　　だから　，

△O_3O_1 O_2 はO_3を頂点とする二等辺三角形であり，

Ｔは底辺O_1 O_2の中点であるから，O_3Ｔは

∠$O_1O_3O_2$を二等分する。

∠O_1O_3　Ｔ＝　∠O_2O_3Ｔ　＝　θ とすると，

∠O_1O_3　O_2　＝　２　θ である。

O_3Ｈ＝O_3Ａ＋ＡＨ

＝O_3Ａ＋（ＡＢ－ＯＢ＋ＯＨ）

$$=a+\left(2r-b+\frac{b-r}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(2a+3r-b)$$ …………………………………… ④

$\mathrm{HT} = \frac{1}{2}\mathrm{d}$ ………………………………………… ⑤

③ ④ より

$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b}}$ ………………………………………… ⑥

$\mathrm{O_3O} = \mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b}$ ………………………………… ⑦

$\mathrm{OO_1} = \mathrm{d}$ ………………………………… ⑧

⑥ ⑦ より

$\tan 2\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b}}$ ………………………………………… ⑨

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ に ⑥ ⑨を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b}} = \frac{2\times\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b}}}{1-\left(\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b}}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b}} = \frac{\frac{2}{2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b}}}{\frac{(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})^2-\mathrm{d}^2}{(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})^2}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b}} = \frac{2\times(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})}{(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})^2-\mathrm{d}^2}$$

$$(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})^2-\mathrm{d}^2 = 2\times(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b})$$

$$\mathrm{d}^2 = (2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})\{(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})-2(\mathrm{a}+2\mathrm{r}-\mathrm{b})\}$$

$\mathrm{d}^2 = (2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})(\mathrm{b}-\mathrm{r})$ ………………………………………… ⑩

③ ⑩ より

$$\frac{(\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(\mathrm{b}^2-\mathrm{r}^2)}{\mathrm{b}^2} = (2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})(\mathrm{b}-\mathrm{r})$$

$$\frac{(\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(\mathrm{b}+\mathrm{r})}{\mathrm{b}^2} = (2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})$$

$$(\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2)(\mathrm{b}+\mathrm{r}) = \mathrm{b}^2(2\mathrm{a}+3\mathrm{r}-\mathrm{b})$$

$a^2b + a^2r - 4b^2r - 2ab^2 = 0$

$(a - 2b)(ab + a + 2b) = 0$

$ab + a + 2b \neq 0$ より

$a - 2b = 0$

$a = 2b \quad \left(b = \frac{1}{2}a\right)$ ……………………………………………… ⑪

⑪ を ① に代入して

$d^2 = \frac{(4b^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2} = 3(b^2 - r^2)$ ………………………… ⑫

直角三角形 O_1OO_2 に三平方の定理を用いると,

$O_2O^2 + O_1O^2 = O_1O_2{}^2$

$(b - r)^2 + d^2 = (2r)^2$

⑫ を代入すると

$(b - r)^2 + 3(b^2 - r^2) = (2r)^2$

$4b^2 - 2br - 6r^2 = 0$

$2(2b - 3r)(b + r) = 0$

$2b - 3r = 0$

⑪ を用いると

$r = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}a = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

したがって

$(横の長さ) = 2a + 2r = 3 + 1 = 4$

答　4寸

参考　(長方形の縦) = (大円の直径) = (楕円の長径) = 3 寸

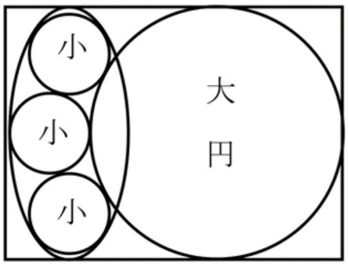
(長方形の横) = 4 寸

(小円の直径) = 1 寸

(楕円の短径) = 1.5 寸

解説

岩手県一関市花泉町の大門神社に慶応２年(1866) ３月２４日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、関流八伝菅原甚蔵実員の門人７名が一題ずつ作成したものですが、この問題は６番目、菅原宇作実薫によるものです。



今有如図直内設側円容大円及小円
三個只云直平三寸問直長幾何

答曰長四寸

術曰置直平四因三除而得直長合問

第六術　菅原宇作実薫

算額では、「今有」として問題文、「答曰」として答え、その後に「術曰」として解き方が書かれています。

使用している和算用語

- **直**　長方形。**長**は長い辺、**平**は短い辺のこと。
- **側円**　楕円。
- **只云…(ただいう…、ただ…という)**　…という条件が与えられていること
- **因(いん)**　１桁の数をかけること

現代風に直すと、以下のようになります。

[問題]　今、図のように長方形の中に楕円をいれ、大円及び小円３個をいれる。

平(短い辺)が３寸の時、長(長い辺)はいくらか。

[答え]　長は４寸

[術(解き方)]

平を４倍し３で割ると長を得て、問に合う。

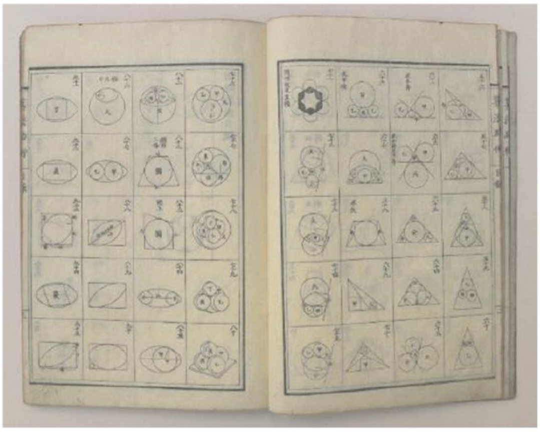
術を現代の式にすると以下のようになります。

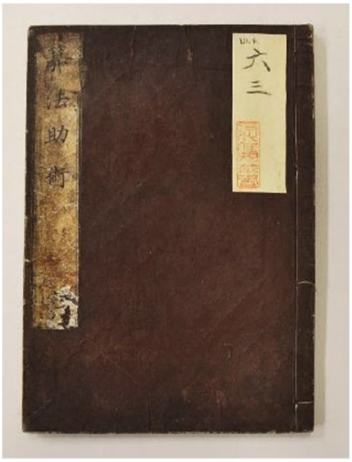
平×４÷３＝長

３×４÷３＝４

最終的な式のみが書かれ、これだけでは、どのような考えでこの式に至ったかは不明です。

講評でふれ、解答例で使用している『算法助術』の 84 番の定理を紹介します。
『算法助術』は、江戸の長谷川数学道場から天保 12 年(1841)に出版されたもので、基本的な幾何学の公式 105 種をまとめたものです。





『算法助術』

８４番の定理は、下のように表わされています。図形の下に書いているのは、点竄術(てんざんじゅつ)や傍書法(ぼうしょほう)といわれる関孝和が考案した式で、現代の数式で表すと右のようになります。

８４

$$\frac{\left(\text{短径}^2-\text{等円径}^2\right)\left(\text{長径}^2-\text{短径}^2\right)}{\text{短径}^2}=\text{子}^2$$