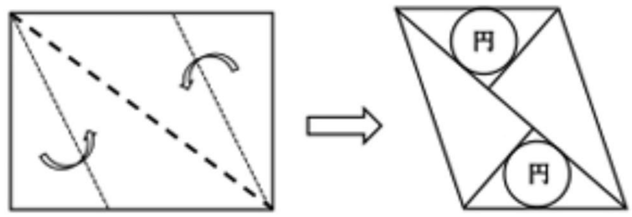
令和6年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県一関市の牧沢八幡神社に明治5年(1872)に奉納された算額の問題をもとにしました。

左図のような縦が3寸、横が4寸の長方形の紙があります。これを左右の縦の辺が対角線(太破線)に重なるように折ります。右図のように上下にできる直角三角形の内接円の直径を求めなさい。



○審査員講評

「江戸からの熱い挑戦」に、今回も力強い応答を示してくれた多くの方々がありました。ありがとうございました。

提示された問題が、「直線と円」という一見基本的な関係図であり、しかも題意が明快なためか、切り崩し易く、解への取り組みに強い意欲が湧いてくるものだったのでしょうか。近年にない応募数でした。正解にたどりつけない答案は希少で、このため正解率もすばらしいものでした。

特徴的な答案の状況として、まず中高年の方々の動きです。往年の学習を甦らせ、大変な意気込み、意欲を見せつけてくれました。中級の優秀者の半数を占めている事がそれを如実に示しております。現在は「三平方の定理」の呼称で通用している用語が「ピタゴラスの定理」として論をすすめている方がほとんどでした。なつかしさを感じました。

沖縄県立開邦中学校からは、まとめて１００名を超える応募がありました。学校全体としての取り組み、それに応える応募生徒諸君の真摯さが見事でした。解の道筋を自分なりに工夫し、それを自分の言葉で表現し、他に見せる事などをある程度想定した仕上げなど日常の鍛錬が伺えました。

応募した中学生からは以下のような感想が寄せられました。

〇図に、わかった情報を聞き込んでいくことで、頭の中が整理出来、それだけで解き易くなった。

〇ひらめきが降りてくるまでいろいろな解き方を自分なりに試行錯誤しながら考えた。

〇不明な点をインターネットで調べて利用した（三角形に内接する円など)。

〇夢があるから挑戦できた。

内接円の径に関連した関係式、例えば(1)直角三角形と内接円、(2)相似三角形と内接円これらより円径を求めたのが岩手県和算研究会で提示した解答例です。応募された解もほぼこの流れに乗ったものが多かった様です。

問題文に「直角三角形」という語句を加えるかについて、ちょっと協議しましたが、応募者は題意より確実に読みとって利用していましたので一安心でした。

「角Ｃが直角である三角形ABCと内接円(r)について、２r＝AC＋BC－AB」が成立。有用な式ですがあまり利用されておりませんでした。ちょっとした証明を加え、今後活用を試みて下さい。

「図形を裁ち合わせて問題を解く」事は、豊かな発想を楽しむ江戸の算術にとって、願ってもない切り込みです。この事を意識した解がありました。実際に折った折紙まで送って頂いた方もおり、大変感激しております。９つの解をものにした方もありました。解の途中での利用部分のちょっとした変化により別解となった部分もありました。対応する熱意と余裕、解の見通し、解の掘り下げなどベテランならではの風情でした。明解で簡素な、数点の解に的を絞り、模範となる解にまとめ上げると申し分ありませんでした。

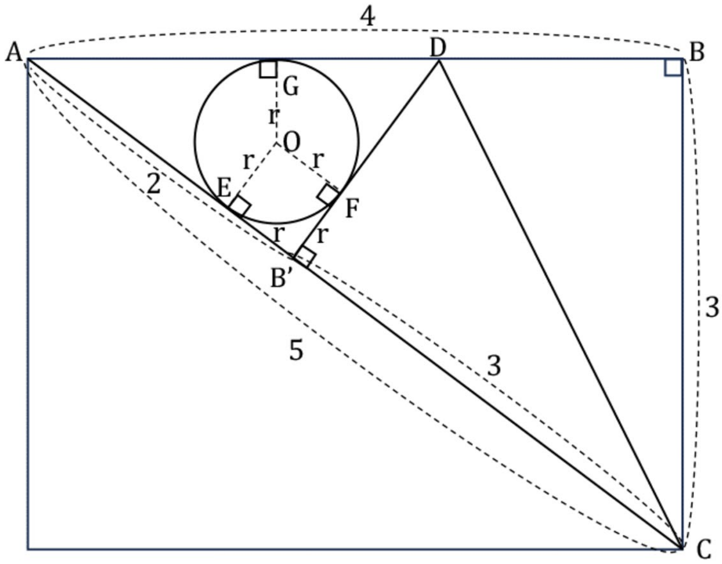
解をすすめるにあたって、使用する文字、例えばＸは何をさすとか、展開する部分が大きく飛ばない道筋とか、単に解決するだけでなく相手を説得する表現の工夫とかはどんな場面でも重要な事柄です。簡単な問題ほど必要であると常に思っております。問題に対しての「深い親しみと謙遜さ」を忘れないようにしたいといつも考えております。

○解答例

内接円を O(r)とする。

直角三角形 ABC で，AB＝4，BC＝3 より

AC＝5 ……………………………………①



①より

AB’＝ AC－B’C＝AC－BC＝5－3＝2 …②

△AB’D と△ABC において

$\begin{cases} \angle AB'D = \angle ABC \ (=90^\circ) \\ \angle B'AD = \angle BAC \ (\text{共通}) \end{cases}$

２組の角がそれぞれ等しいので，

△AB’D ∽ △ABC

したがって，AB’ : B’ D ＝ AB : BC

②より， 2 ： B’ D ＝ 4 ： 3

$B'D = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ………………………… ③

同様に， AB’ : AD ＝ AB : AC

2 ： A D ＝ 4 ： 5

$AD = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ ………………………… ④

「円外の１点からその円にひいた２つの接線の長さは等しい」ことを用いると，

AD＝AG＋DG＝AE＋DF＝(AB’－B’E)＋(DB’－B’F) ＝(AB’－r)＋(DB’－r)＝AB’ ＋DB’ －2r

2r = AB’ ＋DB’ － AD

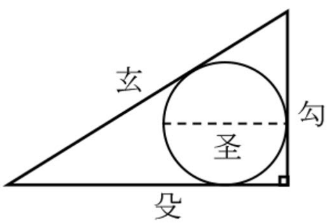
②③④を代入すると

$2r = 2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 1$

したがって　(内接円の直径) = 1　　　　　　　　　　答　１寸

〈参考〉　「直角三角形の内接円の直径」を求める式。和算でよく使われる公式です。

（ 直角三角形の内接円の直径 ）＝（ 直角をはさむ二辺の和 ）－（ 斜辺 ）

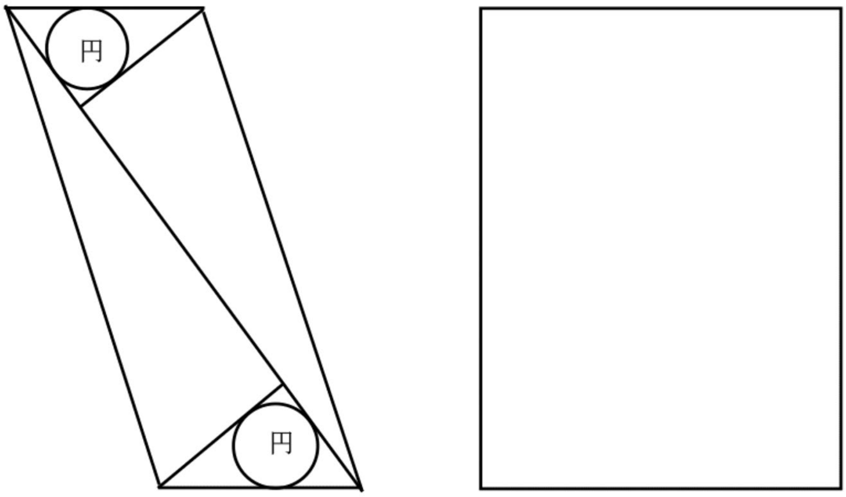


圣 ＝(勾 ＋ 殳)－ 玄

○解説

中級問題は、岩手県一関市の牧沢八幡神社に明治５年(1872) ３月１７日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、関流八伝千葉倉松胤雪門人７人によるものです。千葉倉松胤雪は、奉納された神社のある村の肝入(庄屋)を勤めた人で、当地方の和算の第一人者である千葉胤秀の娘と結婚しています。

この算額には７題の問題がありますが、その４番目の問題です。算額の問題は、以下のように縦長の長方形ですが、この場合は答えが異なるので、出題は横長に変更しました。



今有如図折直紙画円其直紙長四寸
平三寸問円径幾何
答曰円径一寸
術曰置長自之加平巾開平方内減平
余乗長与平二段和以長除之内減長
余得円径合問
小野寺房次郎好隆

算額では、「今有」として問題文、「答曰」として答え、その後に「術曰」として解き方が書かれています。

使用している和算用語。

・**直**　長方形。「**長**」は長い辺、「**平**」は短い辺のこと。
・**自之**(これをじす)　２乗すること、冪と同じ
・**巾・冪**(べき)　２乗すること
・**開平方**(平方に開く)　平方根に開くこと
・**二段**　２倍、四段は４倍

現代風に直すと、以下のようになります。

［問題］　今、図のように長方形の紙を折り、円をかく。

その直方体の長い辺が４寸、平(短い辺)が３寸のとき、円径(直径)はいくらかと問う

［答え］　円径は１寸

［術(解き方)］

長を置き、これを２乗する。これに平の２乗を加え平方に開く。

ここから平を減じ残りに長と平の２倍の和をかけ、長で除す(割る)、

ここから長を減じると円径を得て、問に合う。

術を現代の式にすると以下のようになります。

$$円径=\left\{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times\left(長+2\times平\right)\right\}\div長-長$$

$長=4,\ 平=3$　を代入

$$\left\{\left(\sqrt{4^2+3^2}-3\right)\times(4+2\times3)\right\}\div4-4=\{(5-3)\times10\}\div4-4=20\div4-4=1\ 寸$$

〈 術 文 の 検 証 〉

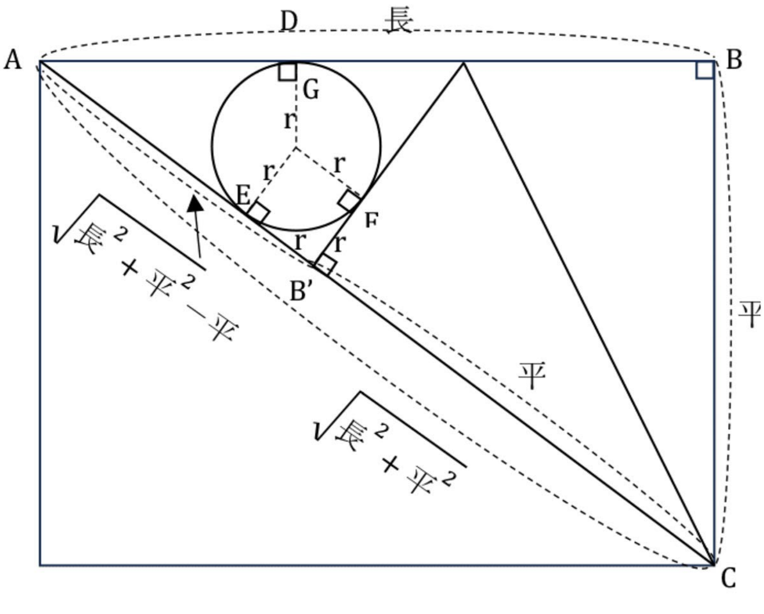
内接円を O(r)とする。

直角三角形 ABC で，AB＝長，BC＝平 より

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{長^2+平^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

①より　AB′＝ AC－B′C

$$=\sqrt{長^2+平^2}-平\qquad\cdots\cdots\cdots ②$$



△AB'D と△ABC において

$$\begin{cases} \angle AB'D = \angle ABC\ (=90^\circ) \\ \angle B'AD = \angle BAC\ (\text{共通}) \end{cases}$$

２組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle AB'D \backsim \triangle ABC$$

したがって, AB'：B'D ＝ AB：BC

②より, $\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)$: B'D ＝長 ：平

$$B'D = \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 平}{長} \quad \cdots\cdots ③$$

同様に, AB'： AD ＝ AB：AC

$$\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right) : AD = 長 : \sqrt{長^2+平^2}$$

$$AD = \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times\sqrt{長^2+平^2}}{長} = \frac{長^2+平^2-\sqrt{長^2+平^2}\times 平}{長}$$

$$= 長 - \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 平}{長} \quad \cdots\cdots ④$$

2r ＝ AB' ＋DB' − AD　に②③④を代入すると

(内接円の直径) ＝ 2r

$$= \left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right) + \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 平}{長} - \left\{ 長 - \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 平}{長} \right\}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 長 + \mathbf{2}\times\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times 平}{長} - 長$$

$$= \frac{\left(\sqrt{長^2+平^2}-平\right)\times(長+\mathbf{2}\times 平)}{長} - 長$$

術文の通りである。