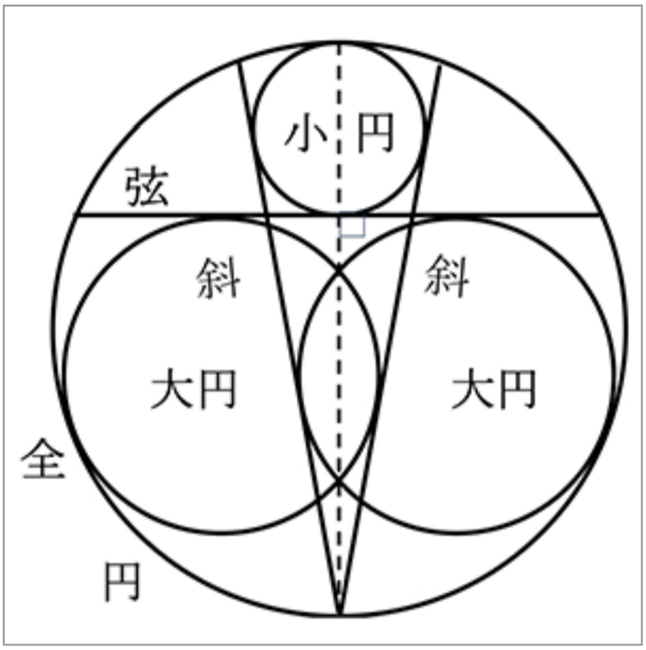
令和7年度出題問題③［上級問題］（高校生・一般向き）

・岩手県一関市の熊野白山滝神社に明治8年(1875)に奉納された算額の問題を元にしました。

図のように、全円の直径(破線)の端点で内接する小円を画きます。別の端点から、小円に接する２つの「斜」(弦のこと)を画きます。
また、直径に直交し、小円に接する弦を画きます。
全円に内接し、斜、弦に接するように、交わる2つの大円を画きます。
全円の直径が定まっていれば、小円の直径が変化すると大円の直径も変化します。
大円の直径が最大となる場合について、弦の長さが7寸のときの、斜の長さを求めなさい。



審査員講評

第24回「和算に挑戦」上級問題にたくさんのご応募いただきましてありがとうございました。一関市には、「最大最小問題」を含む算額があり、平成29年、令和５年にも出題しています（一関市博物館ホームページ「出題問題&解答例」参照)。問題の原文は、「今有全円内如図設弦及二斜容極大円二个及小円一个弦七寸問斜幾何」となっており（和算編参照)、漢字30文字だけからなります。文中の「極大」とは最大のことで「至多」と記すこともあります。問題作成会議では、この原文をわかりやすい現代文にアレンジするための検討を重ね、長い文章になりました。感想の中には、「最初は設問の意味を誤解してしまった。」、「初めは『大円の直径が最大になる場合』という部分に悩んだけれども、『全円の直径が定まっていれば』と記されているので意味がつかめた。」という感想がありました。

岩手県和算研究会では、「微分法を使う方法」と「相加・相乗平均を使う方法」の２通りの解答例を事前につくっていました。応募していただいた解答例のほとんどが微分法を使う解法でした。また、「斜」の長さを示すために、「方べきの定理」、「直径に対する円周角」、「三角関数」、「座標、グラフ」を使う方法が多く見られました。座標を用いた解答では、「点と直線との距離」の公式を用いていた答案もありました。
答案の中に、枠内のよう整理して記された方もおり、見やすいように工夫されていました。

$(\text{全円の直径}) = a$ とすると、 $(\text{大円の直径}) = \dfrac{9}{16}a$ 、 $(\text{小円の直径}) = \dfrac{1}{4}a$ 、

$(\text{弦の長さ}) = \sqrt{3}\,a$ 、 $(\text{弦の長さ}) = \dfrac{8\sqrt{3}}{7}a$

また、黄金比が隠れていることに言及された方もいました。全円の半径を１として計算している方が７名いました。

上枠内に記されているように、全円の直径が定まっていれば、「小円の直径」が「全円の直径」の四分の一のときに、「大円の直径」が最大となりますが、証明なしにこのことを仮定した答案は誤答とさせていただきました。同様に、「弦の両端と、斜の下端点を結んでできる三角形」が正三角形になるとき大円の直径が最大となる、と仮定した答案も誤答とさせていただきました。

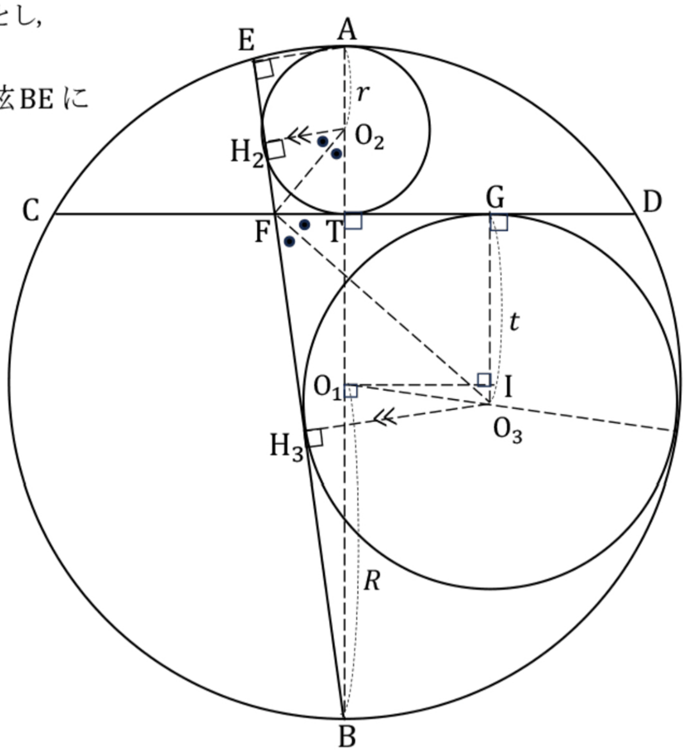
毎年応募されている常連の方々の名前を拝見し、また新しい方の名前も拝見し、大変うれしい気持ちになります。上級問題の挑戦者の最高齢は 83 歳でした。また、過去の受賞者の方々で今年度も素晴らしい答案を寄せくださり、大変勉強させられています。
最後に挑戦者の皆様の熱意に敬意を表し、上級問題の審査の報告とさせていただきます。

【 解答例　1　　微分 】

全円，小円，大円をそれぞれ，$O_1(R)$，$O_2(r)$，$O_3(t)$とし，図のように各点を定める。

弦CD と弦BE との交点をF とし，O_2，O_3から弦BE に下した垂線の足を，それぞれH_2，H_3とする。

O_3から弦CD に下した垂線の足をG とし，O_1からO_3G に下した垂線の足をI とする。



弦CDの長さをR，rで表す。

方べきの定理より，$TC \times TD = TA \times TB$

$$\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 2r \times 2(R-r)$$

$$CD^2 = 16r(R-r) \quad (R>r)$$

$$CD = 4\sqrt{r(R-r)} \cdots\cdots ①$$

弦BEの長さをR，rで表す。

直角三角形 BH_2O_2 に三平方の定理を用いると，

$$BH_2 = \sqrt{BO_2{}^2 - O_2H_2{}^2} = \sqrt{(2R-r)^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{4R(R-r)} = 2\sqrt{R(R-r)} \cdots\cdots ②$$

$\triangle BH_2O_2$と$\triangle BEA$ において

$$\begin{cases} \angle BH_2O_2 = \angle BEA = 90^\circ \\ \angle O_2BH_2 = \angle ABE \quad (\text{共通}) \end{cases}$$

２組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle BH_2O_2 \backsim \triangle BEA$

したがって，$BO_2 : BH_2 = BA : BE$

②を用いると，$(2R-r) : 2\sqrt{R(R-r)} = 2R : BE$

$$BE = \frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r} \cdots\cdots ③$$

FTの長さをR，rで表す。

$\triangle BH_2O_2$と$\triangle BTF$ において，

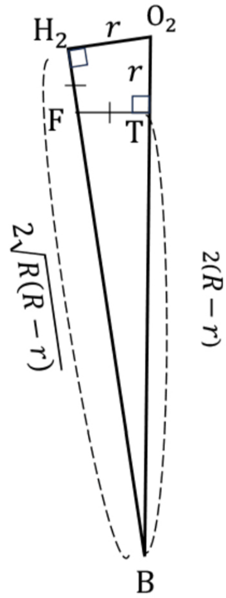
$$\begin{cases} \angle BH_2O_2 = \angle BTF \quad (= 90^\circ) \\ \angle H_2BO_2 = \angle TBG \quad (\text{共通}) \end{cases}$$

２組の角がそれぞれ等しいので$\triangle BH_2O_2 \backsim \triangle BTF$

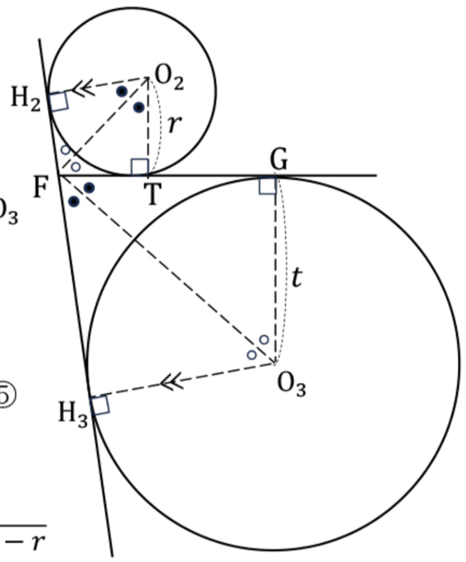
したがって，$BH_2 : BT = O_2H_2 : FT$

②より　　$2\sqrt{R(R-r)} : 2(R-r) = r : FT$

$$FT = \frac{2r(R-r)}{2\sqrt{R(R-r)}} = \frac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}} \cdots\cdots ④$$



FGの長さをR，rで表す。



$\triangle O_2TF$ と $\triangle FGO_3$ において，

$$\begin{cases} \angle O_2TF = \angle FGO_3 \quad (= 90^\circ) \\ \angle O_2FT = \angle FO_3G \end{cases}$$

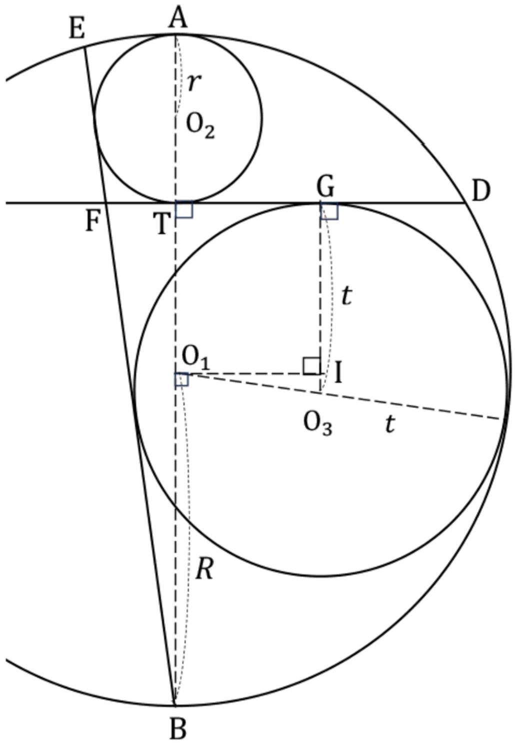
２組の角がそれぞれ等しいので， $\triangle O_2TF \backsim \triangle FGO_3$

したがって，$O_2T : FG = FT : O_3G$

④より　$r : FG = \dfrac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}} : t$

$$FG = \frac{t\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

tをR，rで表す。



⑤④より　$O_1I = TG = FG - FT = \dfrac{t\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}} - \dfrac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}}$

$$= \frac{tR - r(R-r)}{\sqrt{R}\sqrt{R-r}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$O_3I = O_3G + TA - O_1A = t + 2r - R \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$O_1O_3 = R - t \quad \cdots\cdots ⑧$$

直角三角形O_1IO_3に三平方の定理を用いると

$$O_1I^2 + O_3I^2 = O_1O_3$$

⑥⑦⑧より

$$\left(\frac{tR - r(R-r)}{\sqrt{R}\sqrt{R-r}}\right)^2 + (t + 2r - R)^2 = (R-t)^2$$

$$\frac{\{tR - r(R-r)\}^2}{R(R-r)} = (R-t)^2 - \{(R-t) - 2r\}^2$$

$$= 4r\{(R-r) - t\}$$

$$\{tR - r(R-r)\}^2 = 4Rr(R-r)\{(R-r) - t\}$$

$$R^2t^2 + 2Rr(R-r)t - r(4R-r)(R-r)^2 = 0$$

２次方程式の解の公式により，

$$t = \frac{-Rr(R-r) \pm \sqrt{\{Rr(R-r)\}^2 + R^2r(4R-r)(R-r)^2}}{R^2}$$

$$= \frac{-Rr(R-r) \pm 2R(R-r)\sqrt{Rr}}{R^2}$$

$$= \frac{(R-r)\left(-r \pm 2\sqrt{Rr}\right)}{R} \qquad (R > r)$$

$t > 0$ であるから　$t = \dfrac{(R-r)\left(-r + 2\sqrt{Rr}\right)}{R}$

$$t = \frac{1}{R}\left(r^2 - 2\sqrt{R}\,r^{\frac{3}{2}} - Rr + 2R\sqrt{R}\,r^{\frac{1}{2}}\right)$$

Rを固定した場合の t の最大値を R を用いて表す。

ここで　$r^{\frac{1}{2}} = x \quad (0 < x < \sqrt{R})$　と置くと

$$t = \frac{1}{R}\left(x^4 - 2\sqrt{R}\,x^3 - Rx^2 + 2R\sqrt{R}\,x\right) \quad \cdots\cdots ⑨$$

$$t' = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{R}\left(4x^3 - 6\sqrt{R}\,x^2 - 2Rx + 2R\sqrt{R}\right)$$

$$= \frac{2}{R}\left(2x^3 - 3\sqrt{R}\,x^2 - Rx + R\sqrt{R}\right)$$

$$= \frac{4}{R}\left(x - \frac{\sqrt{R}}{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{R}x - R\right)$$

組 立 除 法

2	$-3\sqrt{R}$	$-R$	$+R\sqrt{R}$	$\dfrac{\sqrt{R}}{2}$
	$\sqrt{R}$	$-R$	$-R\sqrt{R}$	
2	$-2\sqrt{R}$	$-2R$		

$$= \frac{4}{R}\left\{x - \frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{R}}{2}\right\}\left(x - \frac{\sqrt{R}}{2}\right)\left\{x - \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{R}}{2}\right\}$$

$\frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{R}}{2} < 0 < \frac{\sqrt{R}}{2} < \sqrt{R} < \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{R}}{2}$,

$0 < x < \sqrt{R}$　を考慮して増減表をつくる。

x	0	·····	$\frac{\sqrt{R}}{2}$ $\left(r = \frac{R}{4}のとき\right)$	·····	$\sqrt{R}$
t'	×	＋	0	－	×
t	×	↗	極大 $\frac{9}{16}R$	↘	×

$r^{\frac{1}{2}} = x = \frac{\sqrt{R}}{2}$ のとき，$r = \frac{R}{4}$ ………… ⑩

(どんなRに対しても,rとの比が同じ)

⑨に $x = \frac{\sqrt{R}}{2}$ $\left(このとき\ r = \frac{R}{4}\right)$ を代入すると

$$t = \frac{1}{R}\left\{\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^4 - 2\sqrt{R}\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^3 - R\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^2 + 2R\sqrt{R}\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{R}\left\{\frac{R^2}{16} - \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{4} + R^2\right\} = \frac{9}{16}R$$

したがって　$r = \frac{R}{4}$ $\left(x = \frac{\sqrt{R}}{2}\right)$ のとき，t の最大値は $\frac{9}{16}R$ となる。

※ $(小円の直径) = \frac{(全円の直径)}{4}$ のとき，$(大円の直径の最大値) = \frac{9}{16} \times (全円の直径)$

①式 $CD = 4\sqrt{r(R-r)}$ に，$CD = 7$，$r = \frac{R}{4}$ を代入し，R，r を求める。

$$4\sqrt{\frac{R}{4}\left(R - \frac{R}{4}\right)} = 7$$

$$\sqrt{3}\,R = 7$$

$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$ ………………………………………… ⑪

$r = \frac{R}{4}$ に，$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$ を代入すると，

$r = \frac{7}{4\sqrt{3}}$ ………………………………………… ⑫

③式 $BE = \frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-1}$ に、⑪⑫を代入する。

$$BE = \frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r} = \frac{4 \times \frac{7}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{7}{\sqrt{3}}\left(\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{7}{4\sqrt{3}}\right)}}{2 \times \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{7}{4\sqrt{3}}} = \frac{4 \times \frac{7}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{7^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)}}{\frac{7}{\sqrt{3}} \times \left(2 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{4 \times \frac{7}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{7}{4}} = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

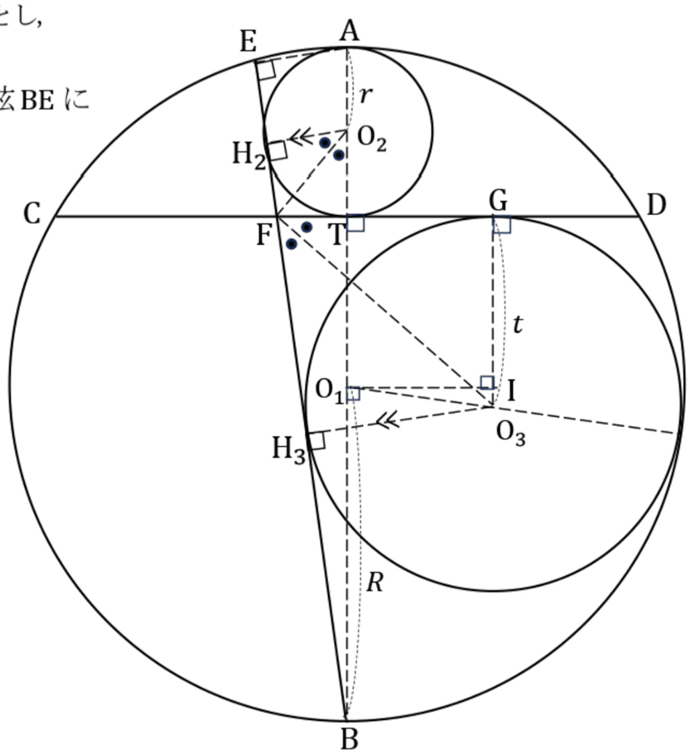
答　8寸

【 解答例　２　相加・相乗平均 】

全円，小円，大円をそれぞれ，$O_1(R)$，$O_2(r)$，$O_3(t)$とし，図のように各点を定める。

弦CD と斜BE との交点をF とし，O_2，O_3から弦BE に下した垂線の足を，それぞれH_2，H_3とする。

O_3から弦CD に下した垂線の足をG とし，O_1からO_3G に下した垂線の足をI とする。



弦CDの長さをR，rで表す。

方べきの定理より，$TC \times TD = TA \times TB$

$$\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 2r \times 2(R-r)$$

$$CD^2 = 16r(R-r) \quad (R > r)$$

$$CD = 4\sqrt{r(R-r)} \quad \cdots\cdots ①$$

斜BEの長さをR，rで表す。

直角三角形 BH_2O_2 に三平方の定理を用いると，

$$BH_2 = \sqrt{{BO_2}^2 - {O_2H_2}^2} = \sqrt{(2R-r)^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{4R(R-r)} = 2\sqrt{R(R-r)} \quad \cdots\cdots ②$$

$\triangle BH_2O_2$と$\triangle BEA$において

$$\begin{cases} \angle BH_2O_2 = \angle BEA = 90^\circ \\ \angle O_2BH_2 = \angle ABE \quad (\text{共通}) \end{cases}$$

２組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle BH_2O_2 \backsim \triangle BEA$

したがって，$BO_2 : BH_2 = BA : BE$

②を用いると，$(2R-r) : 2\sqrt{R(R-r)} = 2R : BE$

$$BE = \frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r} \quad \cdots\cdots ③$$

FTの長さをR，rで表す。

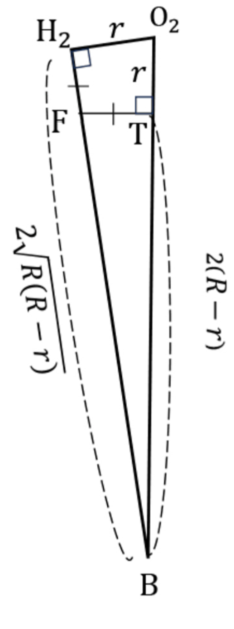
$\triangle BH_2O_2$と$\triangle BTF$において，

$$\begin{cases} \angle BH_2O_2 = \angle BTF \quad (= 90^\circ) \\ \angle H_2BO_2 = \angle TBF \quad (\text{共通}) \end{cases}$$

２組の角がそれぞれ等しいので$\triangle BH_2O_2 \backsim \triangle BTF$

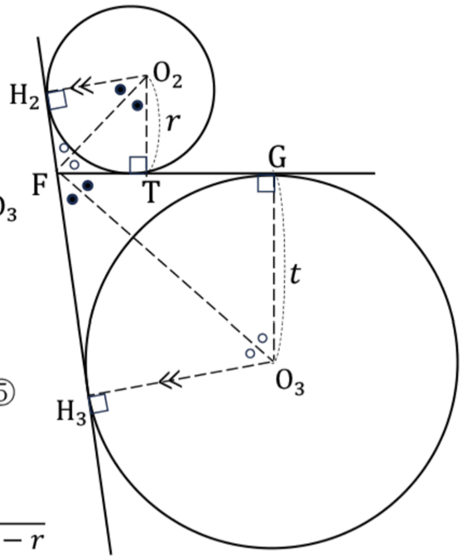
したがって，$BH_2 : BT = O_2H_2 : FT$

②より　$2\sqrt{R(R-r)} : 2(R-r) = r : FT$



$$FT = \frac{2r(R-r)}{2\sqrt{R(R-r)}} = \frac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}} \quad \cdots\cdots ④$$

FGの長さを$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{t}$で表す。



$\triangle O_2TF$ と $\triangle FGO_3$ において，

$$\begin{cases} \angle O_2TF = \angle FGO_3 \quad (= 90^\circ) \\ \angle O_2FT = \angle FO_3G \end{cases}$$

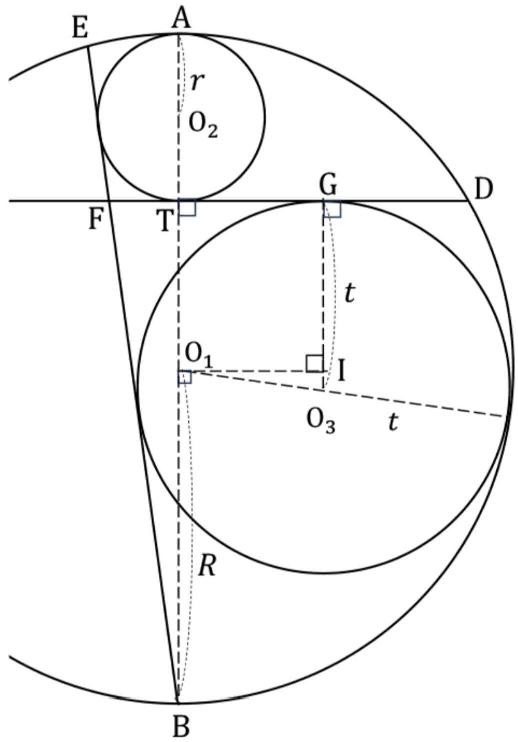
２組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle O_2TF \backsim \triangle FGO_3$

したがって，$O_2T : FG = FT : O_3G$

④より　$r : FG = \dfrac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}} : t$

$$FG = \frac{t\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$\boldsymbol{t}$を$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}$で表す。



⑤④より　$O_1I = TG = FG - FT = \dfrac{t\sqrt{R}}{\sqrt{R-r}} - \dfrac{r\sqrt{R-r}}{\sqrt{R}}$

$$= \frac{tR - r(R-r)}{\sqrt{R}\sqrt{R-r}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$O_3I = O_3G + TA - O_1A = t + 2r - R \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$O_1O_3 = R - t \quad \cdots\cdots ⑧$$

直角三角形O_1IO_3に三平方の定理を用いると

$$O_1I^2 + O_3I^2 = O_1O_3$$

⑥⑦⑧より

$$\left(\frac{tR - r(R-r)}{\sqrt{R}\sqrt{R-r}}\right)^2 + (t + 2r - R)^2 = (R-t)^2$$

$$\frac{\{tR - r(R-r)\}^2}{R(R-r)} = (R-t)^2 - \{(R-t) - 2r\}^2$$

$$= 4r\{(R-r) - t\}$$

$$\{tR - r(R-r)\}^2 = 4Rr(R-r)\{(R-r) - t\}$$

$$R^2t^2 + 2Rr(R-r)t - r(4R-r)(R-r)^2 = 0$$

２次方程式の解の公式により，

$$t = \frac{-Rr(R-r) \pm \sqrt{\{Rr(R-r)\}^2 + R^2r(4R-r)(R-r)^2}}{R^2}$$

$$= \frac{-Rr(R-r) \pm 2R(R-r)\sqrt{Rr}}{R^2}$$

$$= \frac{(R-r)\left(-r \pm 2\sqrt{Rr}\right)}{R} \qquad (R > r)$$

$t > 0$ であるから　$t = \dfrac{(R-r)\left(-r + 2\sqrt{Rr}\right)}{R}$

$$t = \frac{1}{R}(R-r)\left(2\sqrt{Rr} - r\right) \quad \cdots\cdots ⑨$$

$\boldsymbol{R}$を固定した場合の $\boldsymbol{t}$ の最大値を $\boldsymbol{R}$ を用いて表す。

$R - r$ と $2\sqrt{Rr} - r$ について 相加平均 ≧ 相乗平均（等号は$R - r = 2\sqrt{Rr} - r$ のとき成り立つ）を用いると $R - r = 2\sqrt{Rr} - r$ のとき t が最大となる。

すなわち，$R = 2\sqrt{Rr}$

$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{R}}{2}$$

$r = \dfrac{R}{4}$　（どんなRに対しても,rとの比が同じ）$\cdots\cdots$ ⑩

このとき，$t=\frac{1}{R}(R-r)\left(2\sqrt{Rr}-r\right)=\frac{1}{2R}\left\{(R-r)^2+\left(2\sqrt{Rr}-r\right)^2\right\}$

$$=\frac{1}{2R}\left(\frac{9}{16}R^2+\frac{9}{16}R^2\right)$$

$$=\frac{9}{16}R$$

したがって　$r=\frac{R}{4}$　のとき，t の最大値は $\frac{9}{16}R$ となる。

※ $\left(\text{小円の直径}\right)=\frac{\left(\text{全円の直径}\right)}{4}$ のとき，$\left(\text{大円の直径の最大値}\right)=\frac{9}{16}\times\left(\text{全円の直径}\right)$

①式 $\mathrm{CD}=4\sqrt{r(R-r)}$ に，$\mathrm{CD}=7$，⑩式 $r=\frac{R}{4}$ を代入し，R，r を求める。

$$4\sqrt{\frac{R}{4}\left(R-\frac{R}{4}\right)}=7$$

$$\sqrt{3}\,R=7$$

$$R=\frac{7}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots ⑪$$

$r=\frac{R}{4}$ に，$R=\frac{7}{\sqrt{3}}$ を代入すると，

$$r=\frac{7}{4\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots ⑫$$

③式 $\mathrm{BE}=\frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r}$ に，⑪⑫を代入する。

$$\mathrm{BE}=\frac{4R\sqrt{R(R-r)}}{2R-r}=\frac{4\times\frac{7}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{7}{\sqrt{3}}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{7}{4\sqrt{3}}\right)}}{2\times\frac{7}{\sqrt{3}}-\frac{7}{4\sqrt{3}}}=\frac{4\times\frac{7}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{7^2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)}}{\frac{7}{\sqrt{3}}\times\left(2-\frac{1}{4}\right)}$$

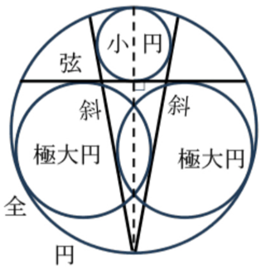
$$=\frac{4\times\frac{7}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{7}{4}}=16\times\frac{1}{2}=8$$

答　8寸

解説

岩手県一関市の熊野白山滝神社に明治８年(1875)に奉納された算額の問題を元にしました。千葉胤秀の高弟の千葉倉松(1808-1892)の門人７名が奉納したものですが、今回の問題は最初の問題です。千葉倉松はこの神社の近くの滝沢村の人です。多くの門人を育て、彼らが奉納した算額も多く、現存するものだけでも 10 面あります。

算額には以下のように書かれています。



今有全円内如図設弦及二斜容極大円二个
及小円一个弦七寸問斜幾何

答曰斜八寸

術曰置弦八因七除之得斜合問

高田宇右衛門矩員

算額では、「今有」として問題文、「答曰」として答え、その後に「術曰」として解き方を書く例が多いです。

術を現代の式に直すと

弦×８÷７＝　斜

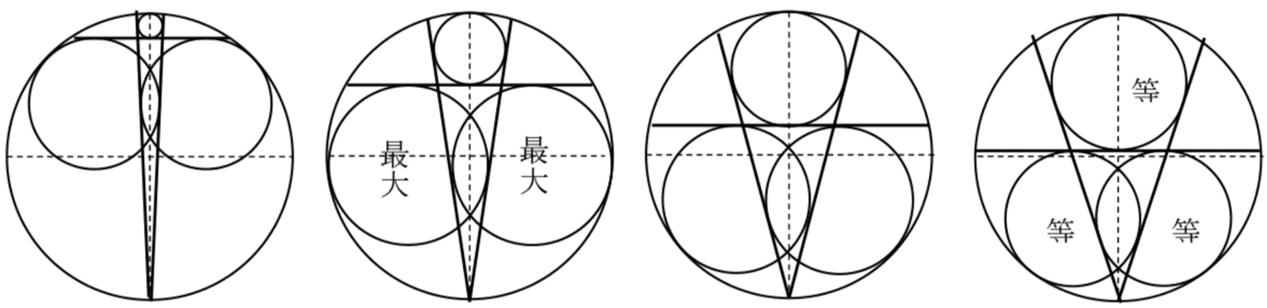
となります。

※因(いん)　１桁の数をかけること

したがって、斜=７×８÷７＝８

と、答えは出ていますが、これだけで当時の人たちの考えを知る事は困難です。

【 参 考 】



POINT

小円の直径が，全円の直径の四分の一のとき，大円の直径が最大となる。