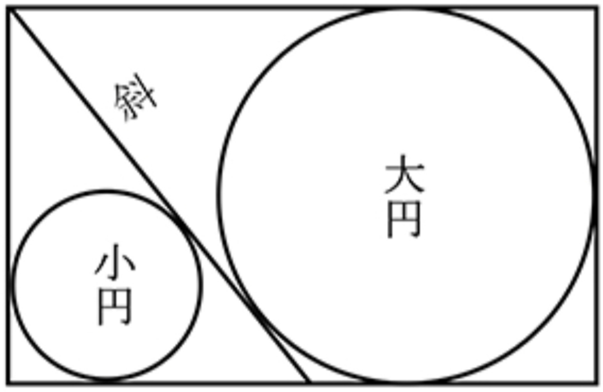
令和7年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・『算法新書』文政13年(1830)刊の問題をもとにしました。

図のように、長方形内に「斜」を隔てて大円と小円が内接しています。
長方形の縦が２寸、横が3寸のとき、小円の直径を求めなさい。



審査員講評

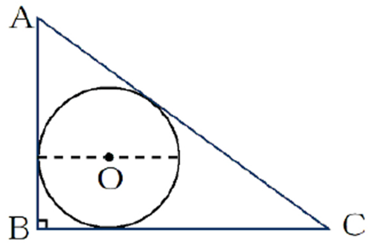
令和７年は、一関市の和算家 千葉胤秀（1775～1849）生誕250年でした。節目の年として、一関市博物館では、特別展『算額の世界』を開催しました。中級問題は、千葉胤秀が編集し、文政13年（1830）に出版された『算法新書』からの問題でした。この『算法新書』は、幕末期から明治期にかけてのベストセラーといわれています。この書の「容術」という項目には25の問題があり（今年度の問題は19番目の問題)、ほとんどが中高生が取り組める内容で、初等幾何の「比」と「三平方の定理」を用いて解くことができます。現代の中学校の教科書にも載っているような興味深い問題を含んでいます。

一人で複数の解法を提出していただいた方々もおり、最高は６通りの解法でした。また、三角形を色鉛筆で色分けして視覚的にとらえやすいように工夫している答案があり、挑戦者の熱意が伝わってきました。「比」、「面積」、「合同」、「相似」、「三平方の定理」など多様な解法を示していただきました。他に余弦定理を用いた答案、一般の方で『算法新書』の方法で解いている答案もありました。

令和６年度の中級問題の「岩手県和算研究会の解答」にも載せましたが、下の枠内の定理を使った答案もみられました。

[直角三角形の内接円]
右図のように，$\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形に円Oが内接するとき，

内接円の直径＝ AB ＋ BC － CA
が成り立つ。



この定理は、和算でよく使われる公式で、大変重宝します。解答例３を参照してください。高校生の答案は、初等幾何を用いた答案の他に、座標を設けた解析幾何で解いたものが多く、「点と直線との距離の公式」を用いたものが多く見られました。残念なことに何を未知数 x とするのか記されていないものが見られました。方程式を作るときは、必ず未知数についてのただし書きを添えることを心がけるとよいと感じました。中高生は、鉛筆の直筆で書いていますが、字が薄いものがありました。濃く書いていただくと大変ありがたいです。

「方眼紙に実際に図を描いてみて、小円の直径が１寸となった」という内容の答案があり、数学的な推論の方法ではないので誤答とさせていただきました。また、「斜が、長方形の下辺の中点を通る。」と仮定した方々がいました。結果的には、斜が、長方形の下辺の中点を通ることになりますが証明が必要です。また、小円の半径０.５寸を求めてこれを答えにしてしまった答案がありました。

ご応募いただいた皆様ありがとうございました。挑戦者の皆様の熱意に敬意を表します。来年度、たくさんの挑戦者のすばらしい解答を期待しています。中級問題は、初めて参加される方にも和算文化に触れて頂けるよう岩手県の算額や、和算書などから出題いたします。

○解答例

【 解答例　１ 】

右図のように，長方形ＡＢＣＤの頂点Ａから大円にひいた接線がＢＣと交わる点をＥとし，大円と辺ＢＣ，辺ＡＤ，辺ＡＥとの接点をそれぞれＦ，Ｇ，Ｈ とする。

ＥＣ＝ x とすると，

ＢＥ＝ＢＣ－ＥＣ＝$3-x$ ……………………………… ①

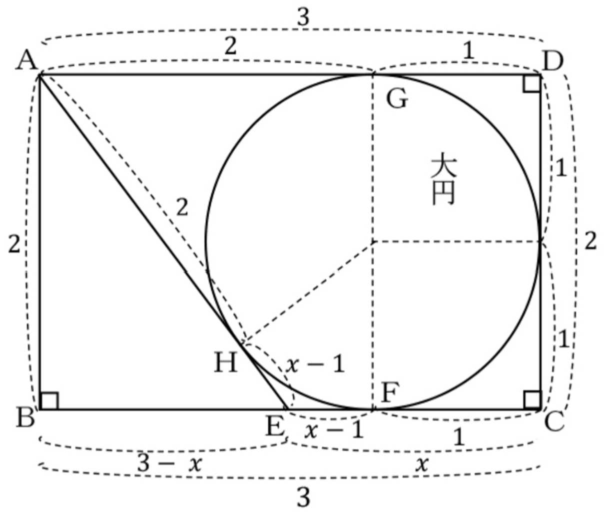
円外の１点から円にひいた２つの接線は等しいから，

ＡＨ＝ＡＧ＝ＡＤ－ＧＤ＝$3-1=2$ ……… ②

ＥＨ＝ＥＦ＝ＥＣ－ＦＣ＝$x-1$ ……………… ③

②③より

ＡＥ＝ＡＨ＋ＥＨ＝$2+(x-1)=x+1$ …. ④



直角三角形ＡＢＥに三平方の定理を用いると，

$AB^2+BE^2=EA^2$

①④を代入すると，

$2^2+(3-x)^2=(x+1)^2$

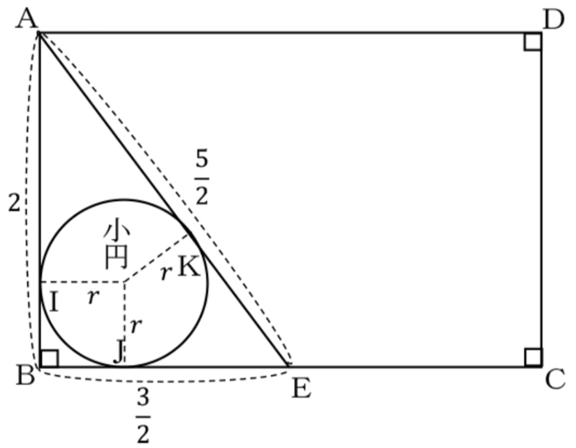
$4+9-6x+x^2=x^2+2x+1$

$8x=12$

$x=\frac{3}{2}$ ……………………………………………………… ⑤

①⑤より　ＢＥ$=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ……………………………… ⑥

④⑤より　ＡＥ$=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ ……………………………… ⑦



小円の半径をr，辺ＡＢ，辺ＢＥ，辺ＡＥとの接点をそれぞれＩ，Ｊ，Ｋとすると，

(小円の直径) $=2r=r+r$

$=$ ＢＩ＋ＢＪ

$=$ (ＡＢ－ＡＩ)＋(ＥＢ－ＥＪ)

$=$ (ＡＢ－ＡＫ)＋(ＥＢ－ＥＫ)

$=$ (ＡＢ＋ＥＢ)－(ＡＫ＋ＥＫ)

$=$ (ＡＢ＋ＥＢ)－ＡＥ

$=$ (ＡＢ＋ＥＢ)－ＡＥ

$=\left(2+\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2}$　　(⑥⑦より)

$=1$

答　１寸

【 解答例　２ 】

右図のように，長方形ＡＢＣＤの頂点Ａから大円にひいた接線がＢＣと交わる点をＥとし，大円と辺ＢＣ，辺ＡＤ，辺ＡＥとの接点をそれぞれＦ，Ｇ，Ｈ とする。

ＥＣ＝ x とすると，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}-\mathrm{EC}=3-x \cdots\cdots ①$$

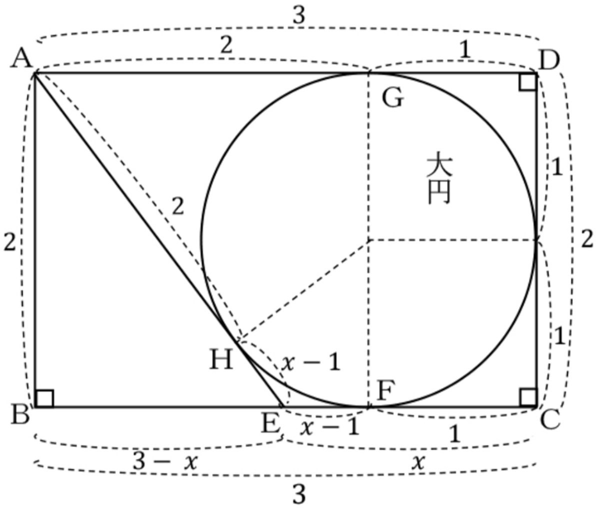
円外の１点から円にひいた２つの接線は等しいから，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AG}=\mathrm{AD}-\mathrm{GD}=3-1=2 \cdots\cdots ②$$

$$\mathrm{EH}=\mathrm{EF}=\mathrm{EC}-\mathrm{FC}=x-1 \cdots\cdots ③$$

②③より

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AH}+\mathrm{EH}=2+(x-1)=x+1 \cdots ④$$



直角三角形ＡＢＥに三平方の定理を用いると，

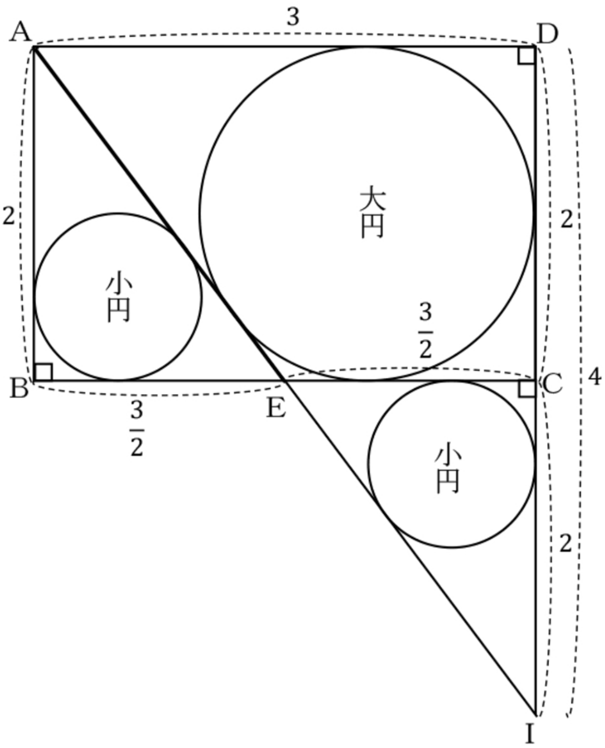
$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BE}^2=\mathrm{EA}^2$$

①④を代入すると，

$$2^2+(3-x)^2=(x+1)^2$$
$$4+9-6x+x^2=x^2+2x+1$$
$$8x=12$$
$$x=\frac{3}{2} \cdots\cdots ⑤$$

①⑤より　$\mathrm{BE}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ⑥$

⑥より　$\mathrm{EC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BE}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \cdots\cdots ⑦$



ＤＣの延長線とＡＥの延長線の交点をＩとする。

△ＡＢＥと△ＩＣＥにおいて

$$\begin{cases} \mathrm{BE}=\mathrm{CE} & \left(=\frac{3}{2}\right) \\ \angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{ICE} & (=90^\circ) \\ \angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{IEC} & (\text{対頂角}) \end{cases}$$

一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ＡＢＥ≡△ＩＣＥ

したがって，△ＩＣＥの内接円は小円である。（右図参照）

△ＩＣＥと△ＩＤＡは相似で，相似比は１：２であるから，小円の直径は，大円の２分の１となるから，１寸となる。

答　１寸

【 解答例　３ 】

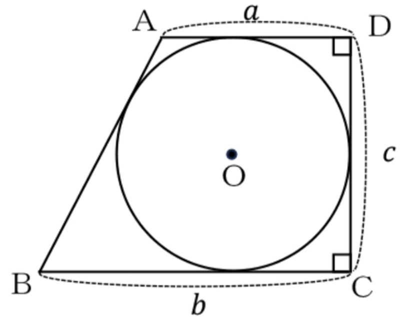
［ 補助定理１ ］

右図のように，上底ＡＤ＝ a，下底ＢＣ＝ b，高さＤＣ＝ c（∠ＡＤＣ＝∠ＢＣＤ＝９０°）の台形ＡＢＣＤに円Ｏが内接するとき，

$$\text{内接円の直径}=c=\frac{2ab}{a+b}$$

が成り立つ。

（内接円の直径は，上底と下底の調和平均になる。）



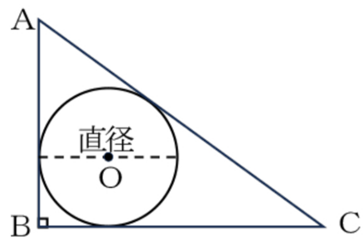
この補助定理１は，『算法助術』項目 83 に相当する。証明は後述する。

[補助定理２]

右図のように，∠ABC＝９０°の直角三角形に円Oが内接するとき，

内接円の直径＝AB＋BC－CA

が成り立つ。



この補助定理２は，『算法助術』には記載されていませんが，和算でよく使われる公式です。証明は後述する。

右図において，EC＝xとすると，補助定理１により，

$$\mathrm{CD}=\frac{2\times \mathrm{EC}\times \mathrm{AD}}{\mathrm{EC}+\mathrm{AD}}$$

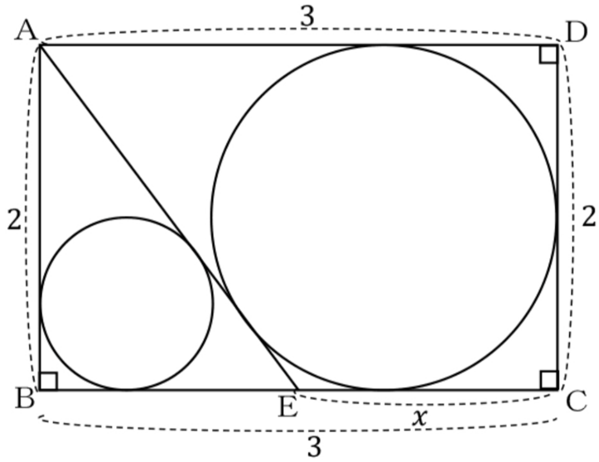
$$2=\frac{2\times x\times 3}{x+3}$$

$$2x+6=6x$$

$$4x=6$$

$$x=\mathrm{EC}=\frac{3}{2}$$

したがって，$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}-\mathrm{EC}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$



直角三角形ABEに三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AE}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BE}^2=2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$\mathrm{AE}>0$ より，$\mathrm{AE}=\frac{5}{2}$

補助定理２により，

$$(\text{小円の直径})=\mathrm{AB}+\mathrm{BE}-\mathrm{AE}=2+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=1$$

答　1寸

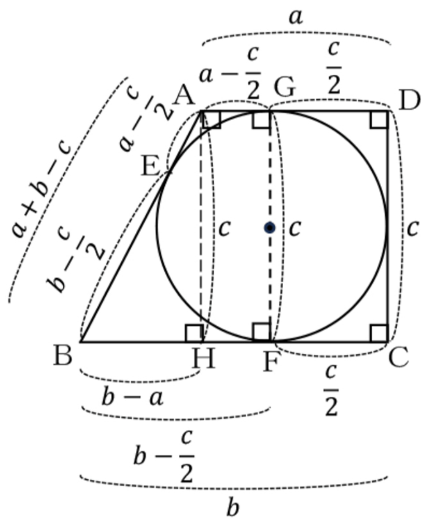
[補助定理１　の証明]

右図のように，内接円と辺AB，辺BC，辺ADとの接点をそれぞれE，F，Gとする。頂点Aから辺BCに下した垂線の足をHとする。

円外の１点から円にひいた２つの接線の長さは等しいから，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}\\&=\mathrm{AG}+\mathrm{BF}\\&=\left(a-\frac{c}{2}\right)+\left(b-\frac{c}{2}\right)\\&=a+b-c\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

また，$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}-\mathrm{HC}=\mathrm{BC}-\mathrm{AD}=b-a$ ⋯⋯⋯⋯ ②



直角三角形ABHに三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{BH}^2+\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2$$

①②より，$(b-a)^2+c^2=(a+b-c)^2$

$$b^2-2ab+a^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$$

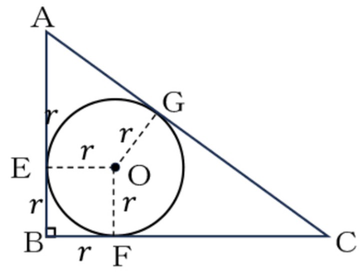
$$2(a+b)c=4ab$$

$$c=\frac{2ab}{a+b}$$

[証明終り]

[**補助定理２**　の証明]

右図のように，円O(r)と辺ＡＢ，辺ＢＣ，辺ＣＡとの接点をそれぞれＥ，Ｆ，Ｇとする。



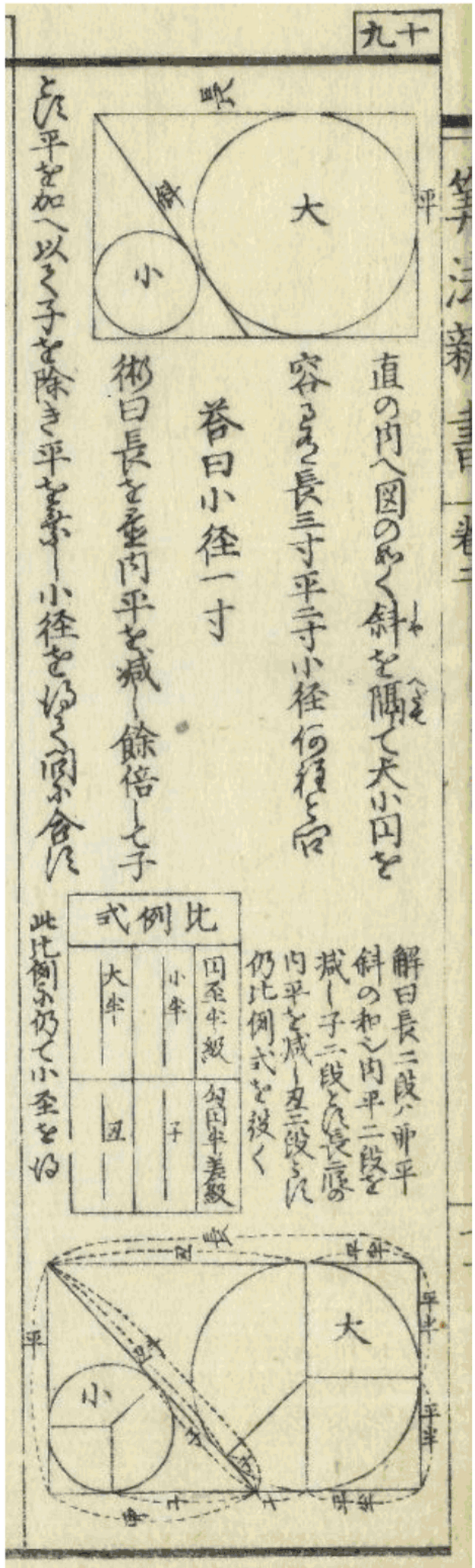
円外の１点から円にひいた２つの接線の長さは等しいから，

$$
\begin{aligned}
(\text{内接円の直径}) &= 2r = \mathrm{BE} + \mathrm{BF} \\
&= (\mathrm{AB} - \mathrm{AE}) + (\mathrm{BC} - \mathrm{CF}) \\
&= \mathrm{AB} + \mathrm{BC} - (\mathrm{AE} + \mathrm{CF}) \\
&= \mathrm{AB} + \mathrm{BC} - (\mathrm{AG} + \mathrm{CG}) \\
&= \mathrm{AB} + \mathrm{BC} - \mathrm{CA}
\end{aligned}
$$

[証明終り]

中級問題は、一関出身の和算家千葉胤秀編の『算法新書』文政 13 年(1830)刊の問題をもとにしました。巻二の容術(ようじゅつ)の例題 25 問のうちの 19 番目の問題です。「容」は内接させるという意味があり、「容術」とは、多角形、円等に 1 つあるいは多くの直線、多角形、円、楕円を内接させた問題です。和算の図形の問題の大部分は容術の問題といえます。

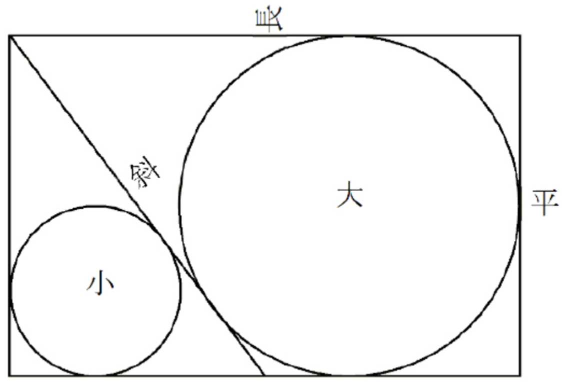
直の内へ図の如く斜(しゃ)を隔(へだて)て大小円を
容る有、長三寸、平二寸、小径何程と
問
答曰　小径一寸
術曰長を置、内平を減じ余倍して子
とす、平を加え以て子を除き平を乗
じ小径を得て問に合す



下の部分は解曰…として比例式による解き方を解説しています。

※和算用語
直　長方形
長　長方形の長辺
平　長方形の短辺

算法新書の術



$(長-平)\times 2 = 子$　とすると，

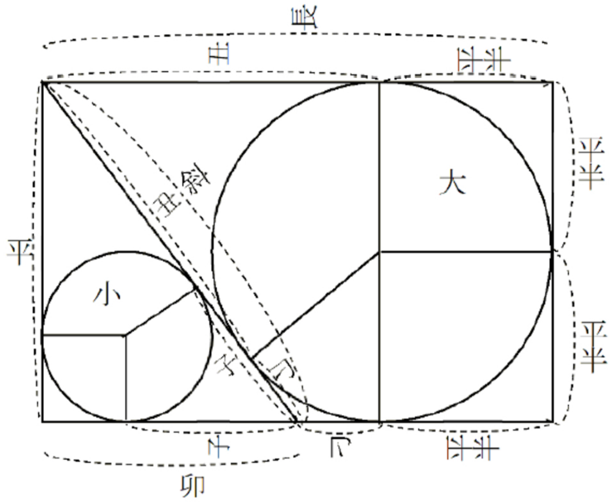
$$\frac{子}{子+平}\times 平 = 小径$$

※　子を用いないで表すと，

$$小径 = \frac{(長-平)\times 2}{(長-平)\times 2 + 平}\times 平 = \frac{(長-平)\times 2\times 平}{長\times 2 - 平}$$

で求めることができる。

算法新書の解



右図において

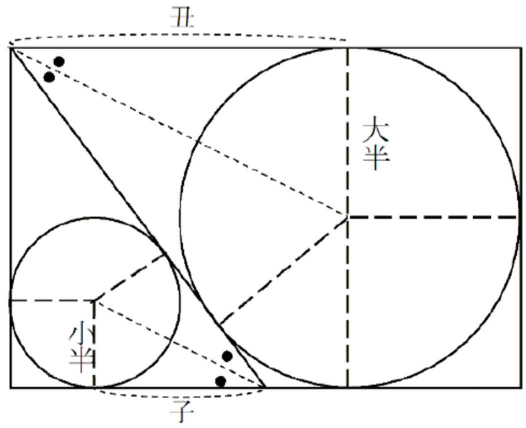
長×２ ＝ 卯 ＋ 平 ＋ 斜　であるから，

長×２－ 平×２ ＝ 子×２

長×２－ 平 ＝ 丑×２　を用いて，比例式を設けると，

小半 ： 大半 ＝ 子 ： 丑

この比例式によって小径を求めることができる。



小 ： 大 ＝ 子×２ ： 丑×２

小 ： 平 ＝ (長×２－ 平×２) : (長×２－ 平)

小 ： 平 ＝ (長－ 平) ×２ : (長×２－ 平)

小＝｛(長－ 平) ×２×平 ｝÷ (長 ×２－ 平)