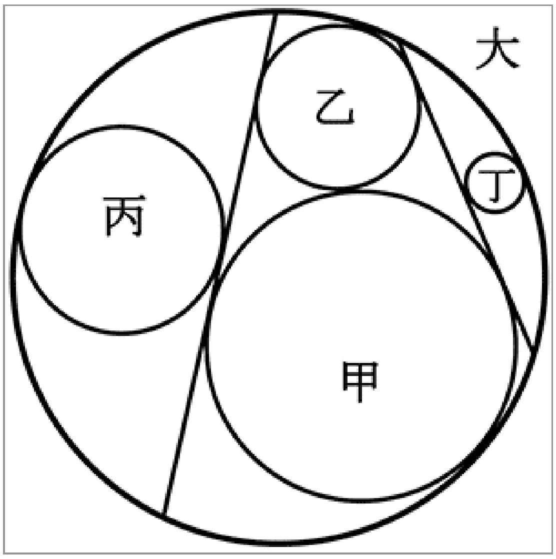
平成26年度出題問題［上級問題］（高校生以上）

外接する甲円,乙円が図のように大円に内接し,2本の弦に接しています。また,丙円,丁円は,大円に内接し,各弦の中点で弦に接しています。

甲円,乙円,丙円の直径が,それぞれ6寸,3寸,4寸のとき,丁円の直径を求めなさい。

※文政13年（1830）刊『算法新書』の問題をもとにしました。



○審査員講評

上級問題は、延べ１４２通の応募がありました。残念ながら過去３年間と比べると応募数が少なくなりました。年齢層では、最小年齢１２歳（小６）から最高年齢８８歳までと幅広く挑戦していただきました。５０代、６０代の応募が多い傾向にありました。高校生以上向けの問題ですので、埼玉県の慶応義塾志木高等学校や岩手県立盛岡第一高等学校などは団体として応募していただきました。

三平方の定理が利用できるように複数の補助線を引くことがポイントとなります。「補助線によって見えないものが見えてくる」のが幾何学の面白さの一つです。計算力は必要となりますが、途中の複雑な計算を根気強く進めれば取り組みやすい問題だったと思います。計算ミスにより誤答になった解答もありました。計算の煩雑さを回避する工夫も必要です。

正答例としては、次の方針で解答したものがほとんどでした。

○三平方の定理を複数回使用する解法。

○三角関数（２倍角の公式）を利用する解法。

○適切に座標軸をさだめて、解析幾何を利用する解法。

○上記の解法を融合した解法。

弦と甲円、乙円それぞれの接点の距離を求め、甲円、乙円、丙円の直径（半径）から大円の直径（半径）を求め、次に甲円、乙円、大円の直径（半径）から丁円の直径（半径）を求めるという問題解法の方針の解答が多く見られました。２つの弦を延長した交点を頂点とする三角形の合同を使う方法も見られました。

弦と甲円、乙円それぞれの接点の距離や、大円の直径を具体的に求めなくとも解答できる問題です。甲円、乙円、丙円、丁円それぞれの直径（半径）の関係（一般性）を求め、最後に具体的な数値を代入するという方針の解答も見られた。昨年１１月に発行された朝倉書店『新解説・和算公式集　算法助術』(土倉保 編著)の項目４０と項目４８ が参考になると思われます。

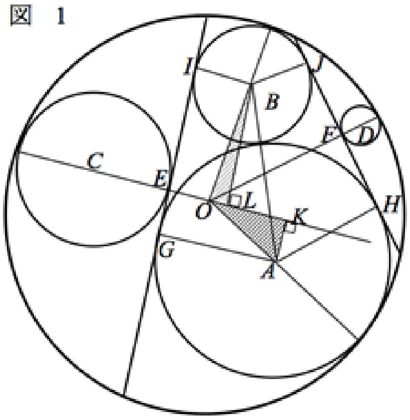
途中の計算式が記入されていない（省略されている）解答もあり、誤答例としては、計算ミスや、直径と半径を取り違えている解答もあり、二次方程式を解いて出る２つの解をきちんと吟味していない解答が見られました。

全体的に、熱心に取り組まれた力作が多く、感服いたしました。解答集に掲載する解答例や各賞の選考には甲乙つけがたく、審査員一同悩みましたが、簡潔、明快に展開されているものを選定させていただきました。皆様方の和算に対する熱い情熱を感じさせられながら、審査をさせていただきました。

○解答例

解答例 1

図 1



大円，甲円，乙円，丙円，丁円を O(R)，A(a)，B(b)，C(c)，D(d) とする。
($2a = 6,\ 2b = 3,\ 2c = 4$)

$GI = HJ = 2\sqrt{ab}$ ……………………………………①

図1のように，A，B から直線 CO への垂線の足を K，L とする。
直角三角形 OKA に着目し，

$OA = R - a$ と

$OK = EK + 2c - R = GA + 2c - R = a + 2c - R$ より

$EG = AK = \sqrt{(R-a)^2 - (a+2c-R)^2} = \sqrt{(R-a)^2 - (R-a-2c)^2}$ ….②

直角三角形 OLB に着目し，

$OB = R - b$ と

$OL = |EL + 2c - R| = |BI + 2c - R| = |R - b - 2c|$ より

$EI = BL = \sqrt{(R-b)^2 - (R-b-2c)^2}$ ……③

$EG + EI = GI$ だから ①②③より

$\sqrt{(R-a)^2 - (R-a-2c)^2} + \sqrt{(R-b)^2 - (R-b-2c)^2} = 2\sqrt{ab}$ ……◇

$\sqrt{4(R-a)c - 4c^2} + \sqrt{4(R-b)c - 4c^2} = 2\sqrt{ab}$

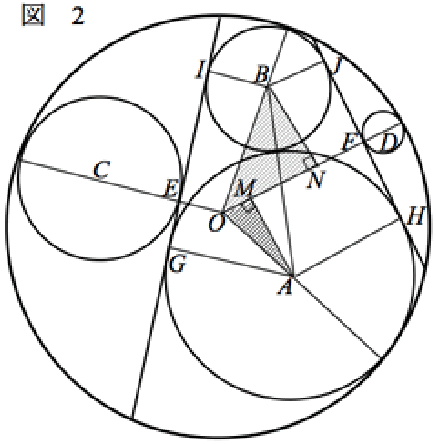
$\sqrt{(R-a)c - c^2} + \sqrt{(R-b)c - c^2} = \sqrt{ab}$

$\sqrt{(R-a)c - c^2} = \sqrt{ab} - \sqrt{(R-b)c - c^2}$

$(R-a)c - c^2 = ab + (R-b)c - c^2 - 2\sqrt{ab}\sqrt{(R-b)c - c^2}$

$$\mathrm{Rc-ac=ab+Rc-bc-2\sqrt{ab}\sqrt{(R-b)c-c^2}}$$

図 2



$$2\sqrt{ab}\sqrt{(R-b)c-c^2}=ab+(a-b)c$$

$$4ab\{(R-b)c-c^2\}=\{ab+(a-b)c\}^2$$

$$(R-b)c-c^2=\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4ab}$$

$$(R-b)c=c^2+\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4ab}$$

$$R-b=c+\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4abc}$$

$$R=b+c+\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4abc} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

図2のように，A, Bから直線DOへの垂線の足をM, Nとする。
直角三角形OMAに着目し，

$OA=R-a$ と

$OM=R-MF-2d=R-AH-2d=R-a-2d$ より

$$FH=AM=\sqrt{(R-a)^2-(R-a-2d)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

直角三角形ONBに着目し，

$OB=R-b$ と

$ON=R-NF-2d=R-b-2d$ より

$$FJ=BN=\sqrt{(R-b)^2-(R-b-2d)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$FH+fJ=HJ$ だから　①⑤⑥より

$$\sqrt{(R-a)^2-(R-a-2d)^2}+\sqrt{(R-b)^2-(R-b-2d)^2}=2\sqrt{ab}$$

この式は◇の c を d に置き換えたものであるから，④より

$$R=b+d+\frac{\{ab+(a-b)d\}^2}{4abd} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

④⑦より

$$b+c+\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4abc}=b+d+\frac{\{ab+(a-b)d\}^2}{4abd}$$

$$c+\frac{\{ab+(a-b)c\}^2}{4abc}=d+\frac{\{ab+(a-b)d\}^2}{4abd}$$

$$\frac{4abc^2d+d\{ab+(a-b)c\}^2}{4abcd}=\frac{4abcd^2+c\{ab+(a-b)d\}^2}{4abcd}$$

$$4abc^2d+d\{ab+(a-b)c\}^2=4abcd^2+c\{ab+(a-b)d\}^2$$

左辺，右辺を入れかえ，変形すると，

$$4abcd^2+c\{a^2b^2+2ab(a-b)d+(a-b)^2d^2\}=4abc^2d+\{ab+(a-b)c\}^2d$$

$$d^2\{4ab+(a-b)^2\}c-d[\{ab+(a-b)c\}^2-2abc(a-b)+4abc^2]+a^2b^2c=0$$

$$d^2(a+b)^2c - d[\{ab+(a-b)c\}^2 - 2abc(a-b) + 4abc^2] + a^2b^2c = 0$$

$[\quad]$の中$=(ab-bc+ca)^2 - 2abc(a-b) + 4abc^2$

$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2ab^2c - 2abc^2 + 2a^2bc - 2a^2bc + 2ab^2c + 4abc^2$$
$$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc^2$$
$$= (a+b)^2c^2 + a^2b^2 \quad より$$

$$d^2(a+b)^2c - d\left\{(a+b)^2c^2 + a^2b^2\right\} + a^2b^2c = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

判別式$=\{(a+b)^2c^2 + a^2b^2\}^2 - 4(a+b)^2a^2b^2c^2$

$$= \{(a+b)^2c^2 + a^2b^2 + 2(a+b)abc\}\{(a+b)^2c^2 + a^2b^2 - 2(a+b)abc\}$$
$$= \{(a+b)c+ab\}^2\{(a+b)c-ab\}^2$$
$$= \{(a+b)^2c^2 - a^2b^2\}^2$$

⑧は2次方程式の解の公式より

$$d = \frac{\{(a+b)^2c^2 + a^2b^2\} \pm \sqrt{\{(a+b)^2c^2 - a^2b^2\}^2}}{2(a+b)^2c}$$
$$= \frac{\{(a+b)^2c^2 + a^2b^2\} \pm |(a+b)^2c^2 - a^2b^2|}{2(a+b)^2c}$$
$$d = \frac{2(a+b)^2c^2}{2(a+b)^2c} = c \qquad \text{or} \qquad d = \frac{2a^2b^2}{2(a+b)^2c} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2c}$$

d=c となるのは，2本の弦の長さが等しい場合であるから，

$d \neq c$ より $\quad d = \dfrac{2a^2b^2}{2(a+b)^2c} = \dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2c}$

$a = \frac{6}{2}$，$b = \frac{3}{2}$，$c = \frac{4}{2}$ を代入すると

$$d = \frac{\left(\frac{6}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{6}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

丁円の直径$=2d=1$（寸）

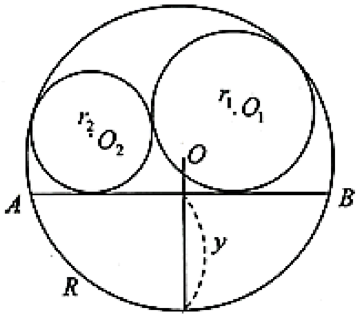
答 1寸

$d = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2c}$ から $\quad \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ が分かります。

$\frac{1}{丙}\cdot\frac{1}{丁} = \left(\frac{1}{甲}+\frac{1}{乙}\right)^2$ となる関係があります。

解答例2

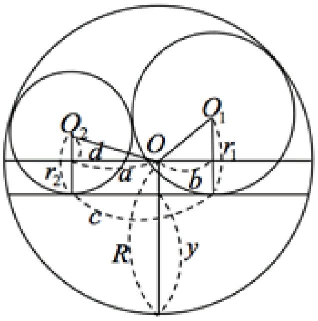
補助定理　（新解説・和算公式集　算法助術　土倉 保 編著　朝倉書店版　項目４８）



図のように円O(R)の弧と弦ＡＢでできる弓形内に互いに外接する２つの円$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ を内接させる。 弦ＡＢに関して円O_1，O_2の反対側にある矢の長さをｙとすると次の式が成り立つ。

$$(r_1+r_2)y+2r_1r_2=2\sqrt{2r_1r_2Ry}$$

［証明］



図より　$d=y-R+r_2$,　　$OO_2=R-r_2$

これらを$a^2=OO_2{}^2-d^2$ に代入して

$$a^2=(R-r_2)^2-\{y-(R-r_2)\}^2=2(R-r_2)y-y^2 \cdots\cdots ①$$

同様に　$b^2=2(R-r_1)y-y^2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$

また $c^2=4r_1r_2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

$+b=c$　だから，平方した式　$a^2+b^2+2ab=c^2$

に①②③を代入すると

$$\{2(R-r_2)y-y^2\}+\{2(R-r_1)y-y^2\}+2ab=4r_1r_2$$

$$ab=y^2-(2R-r_1-r_2)y+2r_1r_2$$

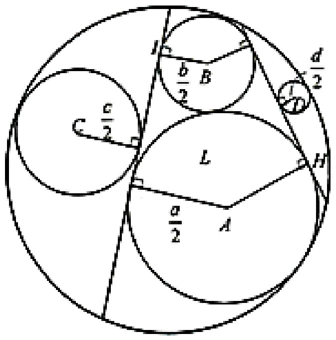
平方して①②を代入すると

$$\{2(R-r_2)y-y^2\}\{2(R-r_1)y-y^2\}=\{y^2-(2R-r_1-r_2)y+2r_1r_2\}^2$$

$$(r_1+r_2)^2y^2+4r_1r_2(r_1+r_2)y+4r_1{}^2r_2{}^2=8Rr_1r_2y$$

$$\{(r_1+r_2)y+2r_1r_2\}^2=8Rr_1r_2y$$

平方根をとれば求める式が得られる。［終証］



$(a+b)\cdot c+ab=4\sqrt{\frac{1}{2}\cdot abRc}$ ・・・・・・④

同様に

$(a+b)\cdot d+ab=4\sqrt{\frac{1}{2}\cdot abRd}$ ・・・・・・⑤

④, ⑤より

$$\frac{(a+b)c+ab}{(a+b)d+ab}=\sqrt{\frac{c}{d}}$$

$$\{(a+b)c+ab\}^2d=\{(a+b)d+ab\}^2c$$

$$(a+b)^2(c-d)cd=a^2b^2(c-d)$$

$c\neq d$ だから

$$(a+b)^2cd=a^2b^2$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \qquad \frac{1}{\text{丙}}\cdot\frac{1}{\text{丁}}=\left(\frac{1}{\text{甲}}+\frac{1}{\text{乙}}\right)^2$$

$a=6$, $b=3$, $c=4$ を代入すると

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2$$

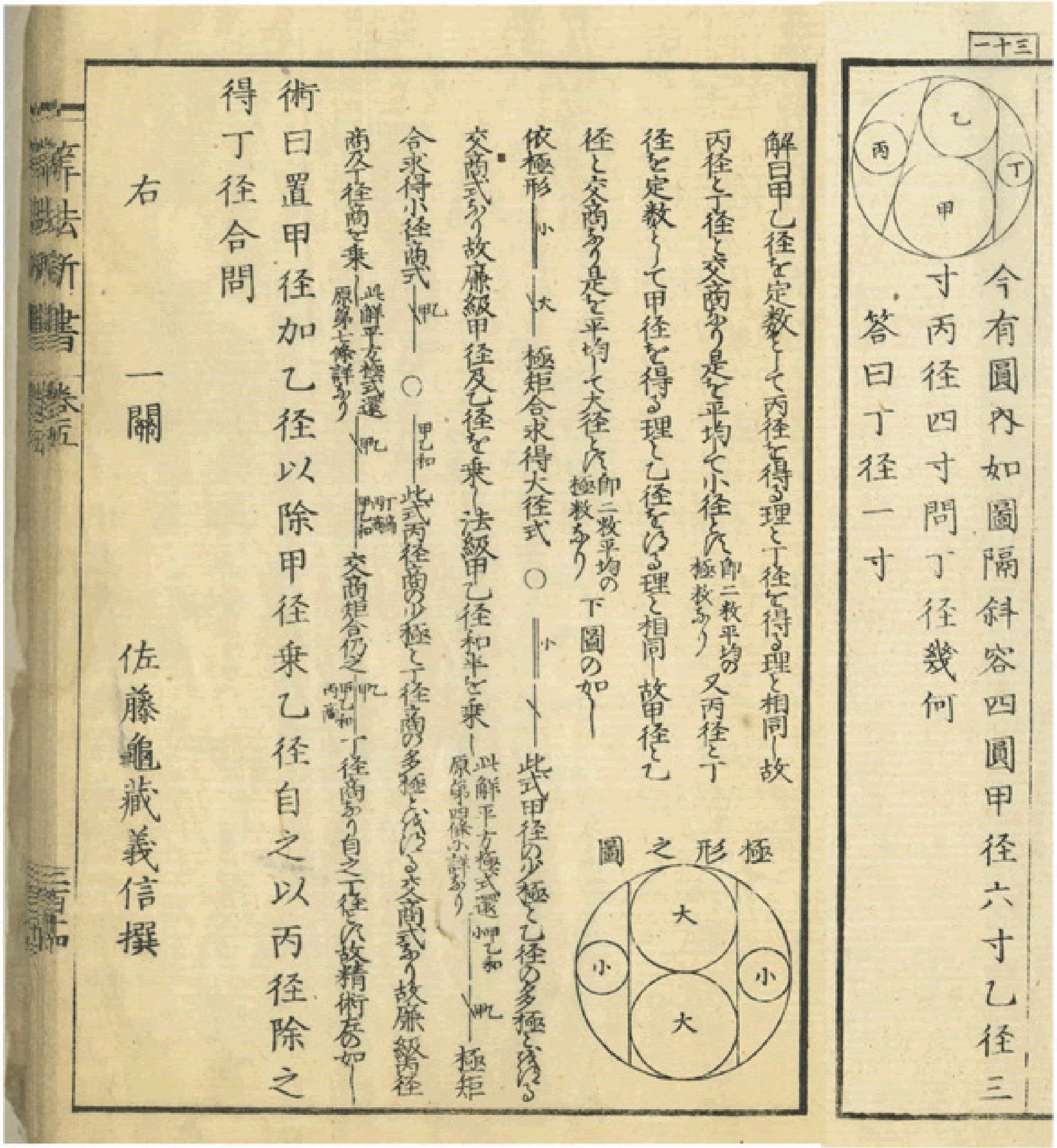
(丁円の直径) $=d=1$ (寸)

答. 1 (寸)

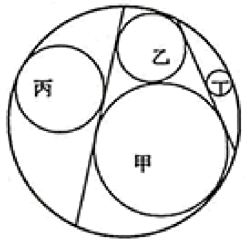
上級問題

上級問題も、中級同様『算法新書』の問題です。巻末にある附録「極形術用法」の第３１問です。この附録の部分は、千葉胤秀の門弟５３人が、それぞれ問題を出しており、この問題は一関の佐藤亀蔵義信の問題です。

極形術とは、図形を極形に変形して考える方法です。極形は、１つの図形において、２つの量 a、b を与えて、第３の量 x が、a、b について $f(x, a+b, ab) = 0$ を満足するものと仮定し、a、b を共に変化させて、$a = b$ となる極限の図形のことをいいます。この問題では、甲円と乙円、丙円と丁円がそれぞれ等円となる場合を極形と考えて解いています。



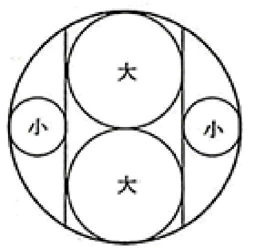
今有円内如図隔斜容四円甲径六寸乙径三
寸丙径四寸問丁径幾何



答曰丁径一寸

解曰甲乙径を定数として丙径を得る理と丁径を得る理と相同じ故
丙径と丁径と交商なり、是を平均して小径とす 即二数平均の極数なり 又丙径と丁
径を定数として甲径を得る理と乙径を得る理と相同じ故甲径と乙
径と交商なり、是を平均して大径とす 即二数平均の極数なり 下図の如し

極形之図



依極形 小 大 極矩合求得大径式 ○ 小 此式甲径の少極と乙径の多極とを得る
交商式なり故廉級甲径及乙径を乗し法級甲乙径和半を乗し 此解平方極式還原第四條に詳なり 小甲乙和 甲乙 此式極矩
合求得小径商式 甲乙 ○ 甲乙和 此式丙径商の少極と丁径商の多極を得る交商式なり故廉級丙径
商及丁径商を乗し 此解平方極式還原第七條に詳なり 甲乙 丁商甲商甲乙和 交商矩合仍之 甲乙 甲乙和丙商 丁径商なり、自之丁径とす故精術左の如し
術曰置甲径加乙径以除甲径乗乙径自之以丙径除之
得丁径合問

右　一関　佐藤亀蔵義信撰

用語

交商(こうしょう)

方程式の中の二つの量を交換しても、その方程式の形が不変で、対称になっている時の二つの数。

矩合(くごう)　等式を差し引き、零にすること。

廉級(れんきゅう)　一次の項の係数がつく値。

平方極式還原(へいほうきょくしきかんげん)

極形術で「平方極式還原之法」として七条が述べられている。交商が２個の場合に、極数矩合を還元して(元に戻して交商矩合)を得る方法

商(しょう)　割って得た数、または、平方に開いた数の答え

補足

算法新書その他により極形術について補足します。

○極形術定則

ア　問題毎に交商がある。

イ　交商を平均して極数という。その象が極形である。

ウ　極形により極数矩合を求める。

エ　極数矩合を還原して交商矩合を得る。

オ　還原之法

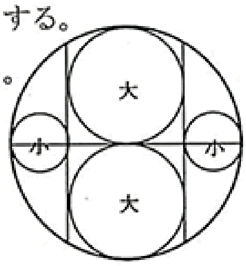
- 平方極式還原之法（一から七）
- 平方極式二位還原之法（一から三）
- 立方極式還原之法（一～九）
- 三乗方極式還原之法（一～四）

- 四乗方以上も同様にできる。

［解 説］

甲乙の直径を定数として丙の直径を求める解答と丁円の直径を求める解答は同じなので、丙円と丁円は交商である。

丙円と丁円の直径を平均して小円の直径とする。２数平均の極数とする。
また、丙円の直径と丁円の直径を定数として甲円の直径を求める解答と乙円の直径を求める解答も同じなので、甲円と乙円も交商である。
甲円と乙円の直径を平均して大円の直径とする。２数平均の極数とする。
この図を右図のように極形図とする。以下、用語は原文を使用する。



右図を横に見て　２・小径＋大径＝２・大径
　∴　　２・小径－大径＝０　　　　　　・・・・・・・・・①
大径＝ｘ　とおくと　　　２・小径－ｘ＝０
（係数は２、１　なので還原できない。）それで大径を求める極矩合（極方程式）は
　$0+2.$ 小径 $\cdot x - x^2 = 0$　　　となる。・・・・・・・・②
この方程式は甲径の小極と乙径の多極とを得る交商式である。
（係数は１，２，１なので還元できる。これは平方極式還原第４条に解説されている）

平方極式還原第４条 極矩合が、　２某＋極数＝０のとき、極数ｘを求める式は、２某＋ｘ＝０　この式の実法段数は平方極式に合わないので、１級降り、$1\cdot 0+2$ 某 $\cdot x + 1 \cdot x^2 = 0$ 廉級に甲乙、法級に $\frac{1}{2}$（甲＋乙）を代入して交商矩合を得る。 すなわち　　甲・某＋乙某＋＋甲乙」

この式の廉級に甲乙、法級に $\frac{1}{2}$（甲＋乙）を代入して

２・小径・$\frac{1}{2}$（甲＋乙）－甲乙＝０

∴　（甲＋乙）・小径－甲乙＝０　・・・・・・③　　これは小径を求める極矩合である。

次に　$\sqrt{\text{小径}} = x$　とおくと③は　－甲乙＋（甲＋乙）$x^2=0$

従って　　－甲乙＋＋０ｘ＋（甲＋乙）$x^2=0$　・・・・・・・・・④

この方程式は丙径商の少極と丁径商の多極を得る交商式である。よって廉級に丙径商と丁径商を代入する。（これは平方極式還原第７条に解説されている。）

> 平方極式還原第７条
>
> 極矩合が、某＋極数＝０のとき、極数ｘを求める式は、某＋ｘ＝０　この式の実法段数は平方極式に合わないので１級降り、$1 \cdot 某 + 2 \cdot 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 = 0$
>
> 廉級に甲商・乙商を代入して交商矩合を得る。すなわち　$某 + \sqrt{甲乙} = 0$

④の廉級に$\sqrt{丙}\sqrt{丁}$を代入して

$-甲乙 + (甲 + 乙)\sqrt{丙}\sqrt{丁} = 0$　・・・・・・・・⑤　　　これは交商矩合である。

これより　$\sqrt{丁} = \dfrac{甲乙}{(甲+乙)\sqrt{丙}}$、

$$\therefore \quad 丁 = \frac{甲^2乙^2}{(甲+乙)^2丙} = \frac{6^2 \times 3^2}{(6+3)^2 \times 4} = \frac{36 \times 9}{9^2 \times 4} = 1$$

術文　$\left(\dfrac{甲}{甲+乙} \times 乙\right)^2 \div 丙 = 丁$

以上が極形術による解答です。