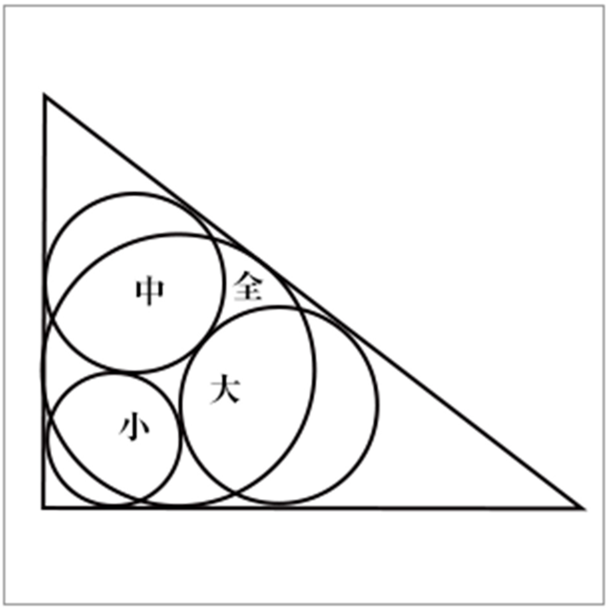
平成27年度出題問題③［上級問題］（高校生以上）

互いに外接する大円, 中円, 小円が図のように直角三角形の辺に接しています。
また, 全円はこの直角三角形の内接円です。大円，中円の直径がそれぞれ9寸，8寸のとき，全円の直径を求めなさい。

※文政13年（1830）刊『算法新書』の問題をもとにしました。



○審査員講評

小学校６年生から８８歳の方まで、延べ９３人の方に応募していただき、正答者は４８人でした。上級問題の応募数、正答率は、ここ数年で最も少なくなりました。

上級問題の図から、「算法助術９番、６４番」や「マルハッチ（Ｍａｌｆａｔｔｉ）の問題」を連想した方もいると思います。平成１８年度、２２年度、の問題と似ていますが、それ以上に難問です。「和算に挑戦」の常連の方にとっても難解だったと思います。

小円径の具体的数値は複雑ですので、小円径を求めてから大円径を求めようとすると計算が非常に煩雑になります。また、解法の方針によっては、計算量が多くなってしまいます。「全円の中心から直角三角形の底辺におろした垂線に大円が接し、かつ、全円の中心から直角三角形の高さの辺におろした垂線に中円が接する」と考えてしまった方もいました。また、全円の半径を求めて終了してしまった方もいました。

４次方程式で、無理数の範囲で因数分解し、うまく計算している方もいました。結果的には、「斜辺と大円、中円それぞれの接点間の距離は、直角の頂点と内接円の中心間の距離に等しい」という関係が出てきます。（岩手県和算研究会の解答例を参考）

応募された解答は、以下の内容を組み合わせて解いていました。

◯三平方の定理
◯４次方程式の解の公式
◯三角関数、加法定理など
◯算法助術６４番
◯解析幾何
◯安島・マルハッチの定理

８ページにおよぶ大作もあり、その計算力には大変お見それいたしました。また、１人で２通り、３通りの解答を提出していただいた方もおり、和算への追求心に審査員も驚きました。

なお上級問題は厳密に審査し、計算途中で近似値を使った答案は誤答とさせていただきました。

今年度の「和算に挑戦」も終了しました。挑戦していただいた方、応募していただいた方、本当にありがとうございました。

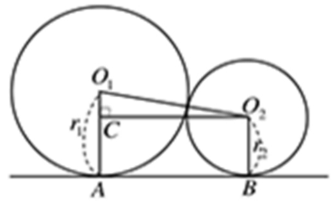
上級問題　解答例

【補助定理 1】

外接する2円 $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ の接線の長さは

$2\sqrt{r_1 r_2}$

［証明］



直角三角形O_1CO_2に三平方の定理を用いると

$$(AB)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

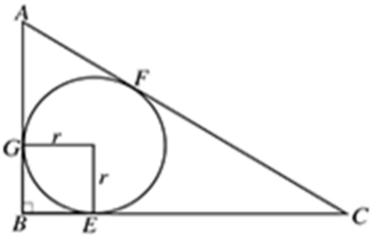
$$(AB)^2 = 4r_1r_2 \qquad AB = 2\sqrt{r_1r_2}$$

【補助定理 2】

$\angle B=90^\circ$ の直角三角形の内接円の半径を r とすると

$2r = AB + BC - CA$

［証明］



$AF = AG = AB - BG = AB - r$ ……①

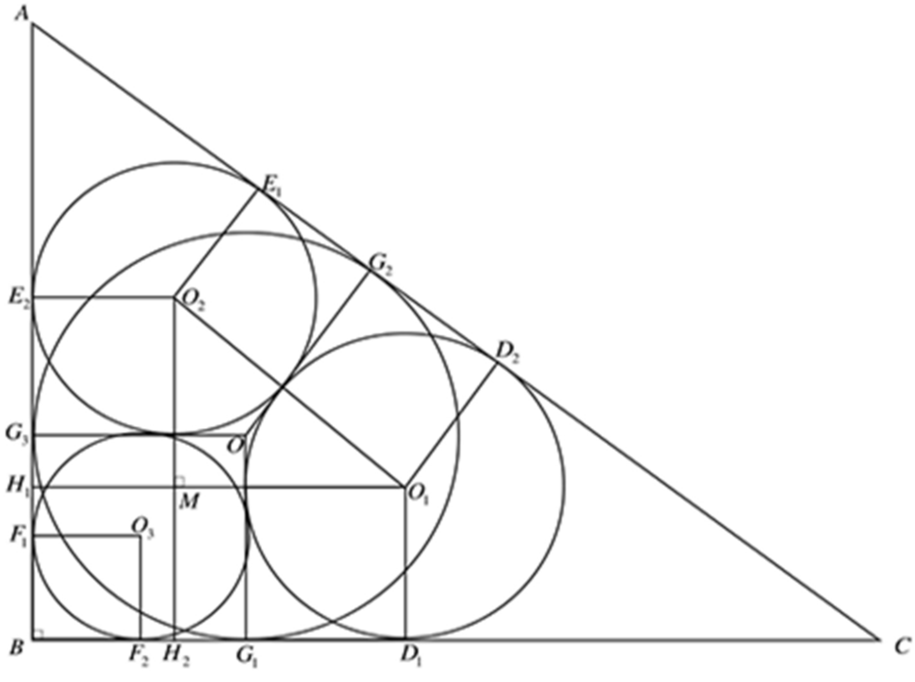
$CF = CE = BC - BE = BC - r$ ……②

①②より

$CA = AF + CF = (AB - r) + (BC - r)$

したがって,

$2r = AB + BC - CA$



図のように，直角三角形の頂点を A, B, C（$\angle B = 90^\circ$），
大円，中円，小円，全円をそれぞれ，$O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$, $O(r)$,
大円と2辺との接点を D_1, D_2,　中円と2辺との接点を E_1, E_2,　小円と2辺との接点を F_1, F_2,
全円と3辺との接点を G_1, G_2, G_3,
O_1 から辺 AB におろした垂線の足を H_1,　O_2 から辺 BC におろした垂線の足を H_2,
O_1H_1 と O_2H_2 の交点を M とする。

直角三角形 O_1MO_2 に三平方の定理を用いると

$$O_1M^2 + O_2M^2 = O_1O_2{}^2$$

$$(BF_2 + F_2D_1 - BH_2)^2 + (BF_1 + F_1E_2 - BH_1)^2 = O_1O_2{}^2$$

$$\left(r_3 + 2\sqrt{r_1r_3} - r_2\right)^2 + \left(r_3 + 2\sqrt{r_2r_3} - r_1\right)^2 = (r_1 + r_2)^2 \quad \text{（補助定理 1より）}$$

$\sqrt{r_1} = a$,　$\sqrt{r_2} = b$,　$\sqrt{r_3} = c$　とすると

$$(c^2 + 2ac - b^2)^2 + (c^2 + 2bc - a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

(左辺) − (右辺)

(左辺) − (右辺)

$$= 2c^4 + 2c^2\{(2ac - b^2) + (2bc - a^2)\} + (2ac - b^2)^2 + (2bc - a^2)^2 - (a^2 + b^2)^2$$
$$= 2c^4 + 4c^3(a + b) + 2c^2(a^2 + b^2) - 4abc(a + b) - 2a^2b^2 \quad = 0$$

$$c^4 + 2c^3(a + b) + c^2(a^2 + b^2) - 2abc(a + b) - a^2b^2 \quad = 0$$
$$\{c^2 + c(a + b)\}^2 - c^2(a + b)^2 + c^2(a^2 + b^2) - 2abc(a + b) - a^2b^2 \quad = 0$$
$$\{c^2 + c(a + b)\}^2 - 2c^2ab - 2abc(a + b) - a^2b^2 \quad = 0$$
$$\{c^2 + c(a + b)\}^2 - 2ab\{c^2 + c(a + b)\} - a^2b^2 \quad = 0$$
$$\{c^2 + c(a + b)\}^2 - 2ab\{c^2 + c(a + b)\} - \{(\sqrt{2} + 1)ab\}\{(\sqrt{2} - 1)ab\} \quad = 0$$
$$\{c^2 + c(a + b) - (\sqrt{2} + 1)ab\}\{c^2 + c(a + b) + (\sqrt{2} - 1)ab\} \quad = 0$$

$c^2 + c(a + b) + (\sqrt{2} - 1)ab > 0$ だから

$$c^2 + c(a + b) - (\sqrt{2} + 1)ab \quad = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

補助定理 2 より

$$2r = AB + BC - CA$$
$$= (AE_2 + E_2F_1 + F_1B) + (CD_1 + D_1F_2 + F_2B) - (AE_1 + CD_2 + D_2E_1)$$
$$= (AE_2 + E_2F_1 + F_1B) + (CD_1 + D_1F_2 + F_2B) - (AE_2 + CD_1 + D_2E_1)$$
$$= (E_2F_1 + F_1B) + (D_1F_2 + F_2B) - D_2E_1$$
$$= 2\sqrt{r_2r_3} + r_3 + 2\sqrt{r_1r_3} + r_3 - 2\sqrt{r_1r_2} \quad \text{(補助定理1より)}$$
$$= 2(c^2 + ac + bc - ab)$$
$$= 2\{c^2 + c(a + b) - ab\}$$
$$= 2\{(\sqrt{2} + 1)ab - ab\} \quad \text{(①より)}$$
$$= 2\sqrt{2}\,ab$$
$$= 2\sqrt{2r_1r_2}$$
$$= 2 \times \sqrt{2 \times \frac{8}{2} \times \frac{9}{2}} = 12$$

答. 12寸

【上級問題の小円径について】

小円径＝約6寸(端数あり)

①より

$$c^2 + c(a + b) - (\sqrt{2} + 1)ab \quad = 0$$
$$c^2 + c\left(\sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}\right) - (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\frac{8}{2}}\sqrt{\frac{9}{2}} \quad = 0$$
$$c^2 + c\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - (\sqrt{2} + 1)\cdot 2\cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad = 0$$
$$2c^2 + (4 + 3\sqrt{2})c - 6\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \quad = 0$$

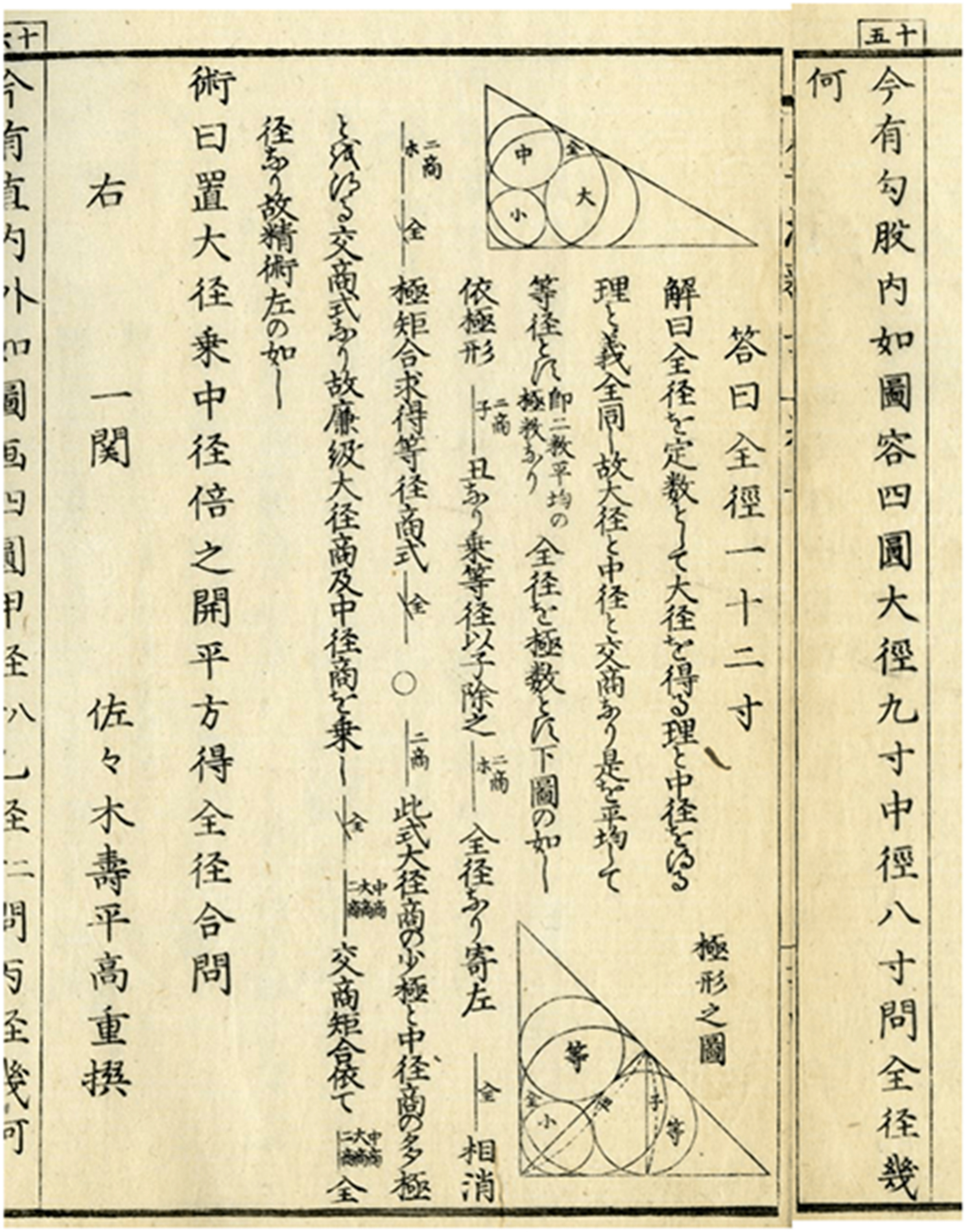
2次方程式の解の公式を用いると,

$$\sqrt{r_3} = c = \frac{-(4+3\sqrt{2}) + \sqrt{130+72\sqrt{2}}}{4}$$
$$r_3 = \left\{\frac{-(4 + 3\sqrt{2}) + \sqrt{130 + 72\sqrt{2}}}{4}\right\}^2 = \frac{41 + 24\sqrt{2} - \sqrt{1969 + 1392\sqrt{2}}}{4} = 3.04773599817$$

(小円の直径)$= 2r_3 \fallingdotseq 6.09547199634$

上級問題

上級問題は、一関の和算家千葉胤秀が編集した『算法新書』（文政１３年（1830）刊）の５巻の最後にある附録「極形術用法（きょくぎょうじゅつ）」の第１５問です。この附録の部分は、千葉胤秀の門弟５３人が、それぞれ問題を出しており、この問題は一関の佐々木壽平によるものです。



十五
今有勾股内如圖容四圓大徑九寸中徑八寸問全徑幾何

答曰全徑一十二寸

極形之圖

解曰全径を定数として大径を得る理と中径を得る理と義全同し故大径と中径と交商あり是を平均して等径とし（即二数平均の極数あり）全径を極数とし下圖の如し

依極形 子二商 丑あり乗等径以子除之 水二商 全径あり寄左 全 相消

極矩合求得等径商式 全 ○ 二商 此式大径商の少極と中径商の多極と成る交商式あり故廉級大径商及中径商を乗し 全 中大二商 交商矩合依て 中大二商 全径あり故精術左の如し

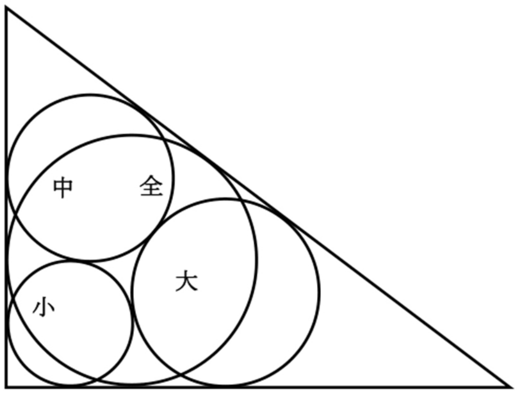
術曰置大径乗中径倍之開平方得全径合問

右 一関 佐々木壽平高重撰

『算法新書』

⑮

今有勾股内如図容四円大径九寸中径八寸問全径幾何



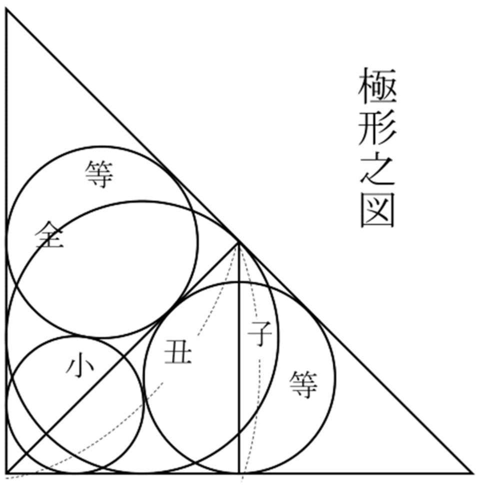
答曰　全径一十二寸

解曰、全径を定数として大径を得る理と中径を得る

理と義全同し故大径と中径と交商なり、是を平均して

等径とす即二数平均の、極数なり、全径を極数とす、下図の如し

極形之図



依極形 二商 子 丑なり、乗等径以子除之 二商 等 全径なり、寄左 全 相消

二商 等 全 極矩合、求得等径商式 全 ○ 二商 此式大径商の少極と中径商の多極

とを得る交商式なり、故廉級大径商及中径商を乗し 全 中商 大商 二商 交商矩合、依て 中商 大商 二商 全

径なり故精術左の如し

術曰、置大径乗中径倍之開平方得全径合問

右　一関　佐々木壽平高重撰

「解曰・・」以下を、証明を加えながら、現代風に解説します。

式の表現の仕方は、初級の「点竄術による式の表現」を参照して下さい。

また、ここでの「商」は$\sqrt{\quad}$を意味しており、「二商」は$\sqrt{2}$、「中商」は$\sqrt{中円の直径}$の意味です。

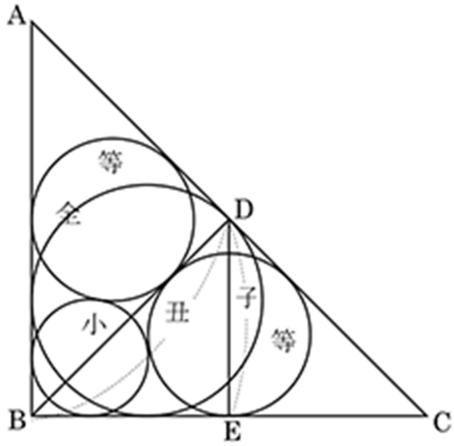
極形の図において$\sqrt{2}$子＝丑

［証明］

直角二等辺三角形ＢDEにおいて、ＢＤ＝$\sqrt{2}$BE

∴　$\sqrt{2}$子＝丑

極形之図



全径＝$\sqrt{2}$等経

［証明］

直角二等辺三角形ＡＢＣにおいて

全径＝２Ｒ＝ＡＢ＋ＢＣ－ＡＣ＝２ＡＢ－ＡＣ

＝２ＡＢ－$\sqrt{2}$ＡＢ＝$\sqrt{2}$（$\sqrt{2}$－１）ＡＢ

また、直角三角形ＢＣＤにおいて

等円径＝ＢＤ＋ＣＤ－ＢＣ＝ＡＣ－ＡＢ＝（$\sqrt{2}$－１）ＡＢ

従って　　$\sqrt{2}$等－全＝０　　極矩合

全径＝$\sqrt{2大径・中径}$＝$\sqrt{2・9・8}$＝１２寸

［証明］

$\sqrt{等径}$＝ｘを得る式は　　－全＋０ｘ＋$\sqrt{2}$ｘ^{2}＝０

廉級のｘ^{2}に$\sqrt{大}\sqrt{中}$を代入して　　－全＋$\sqrt{2大中}$＝０

∴　全径＝$\sqrt{2大径・中径}$＝$\sqrt{2・9・8}$＝１２寸

〈　解　説　〉

極形術は、和算家が数多くの初等幾何学的問題を解いているうちに、不思議な関係に気づくことがあり、長谷川寛の極形術としてあらわれました。しかし、内田五観の「袴腰問題」を極形術で解いた結果はその後の和算家により誤りとされました。

しかし、多くの場合には正しい結果が得られます。どのような理由によるか未解決とされています。

極形術について

１　問題の図形を極形図に直します。

極形術について

1　問題の図形を極形図に直します。

この場合、多角形は正多角形に、楕円は円に、直角三角形は二等辺直角三角形など簡単な図形に変換します。

2　極形図で成立する式：極矩合（極方程式）を導きます。

3　この極方程式を「還原」して、問題の図で成り立つ交商矩合（交商方程式）を導き、これを解きます。

算法新書の記載

1　極形術定則　　図形の交商そして極矩合と交商矩合を説明しています。

2　還原　　　　　極矩合から交商矩合を導く方法を解説しています。

平方極式還原之法：極矩合が１次式や２次式の場合は７通り

立方極式還原之法：３次式の場合で９通り

三乗方極式還原之法：４次式で５通りの方法があります。

さらに、特別な場合として、平方極式二位還原之法もあります。

極形図で成立する方程式は簡単に求まりますので、うまく還原されて交商矩合が得られれば、難問が簡単に解決されます。しかし、その理論的な証明は残念ながらいまのところありません。