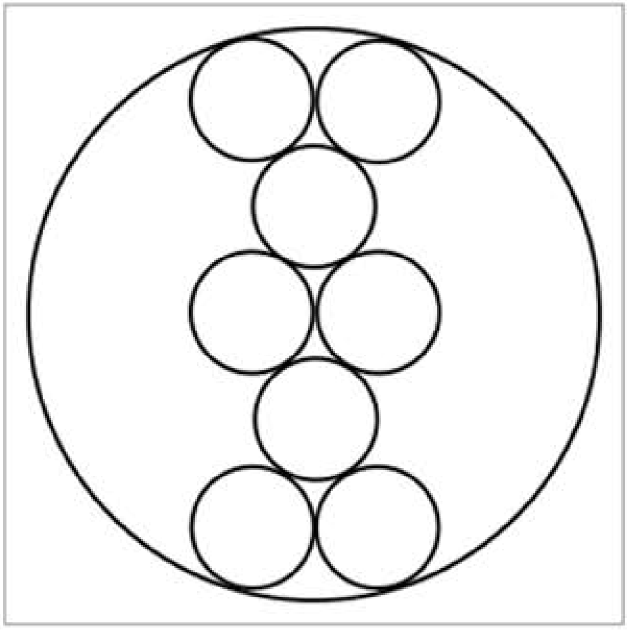
平成27年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

図のように大円内に8個の小円が接しています。大円の直径が25寸のとき，小円の直径を求めなさい。

※岩手県盛岡市の八幡宮に文化6年(1809)に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありません。



○審査員講評

中級問題には、６０９件の応募がありました。応募者数は６０４人で、年齢別では、中学生が３７１人、高校生が１１９人、２０代３人、３０代６人、４０代１１人、５０代２８人、６０代３３人、７０代２５人、８０代７人、不明１人でした。昨年と比べると、中学生、６０代、７０代が増加しております。

正答率は、約５６．８パーセントであり、過去１３回と比較すると３番目に低い正答率でありました。

小円や大円の中心を結んでできる直角三角形に三平方の定理を適応していくだけで解ける問題ですが、意外と取り組みにくい問題であったのかと思われます。

正答例としては次の方法で解いたものが殆どでありました。

① 小円や大円の中心を結んでできる直角三角形に三平方の定理を適応した解法。

② 座標軸を設定し、解析幾何を利用した解法。

③ 三角関数(余弦定理、正接など)を用いた解法。

誤答となった例としては、次のようなことが挙げられます。

・この問題の大円と小円の関係においては、「大円に接する小円の中心と大円の中心を結ぶ中心線は大円と小円の接点を通る」が、「大円に内接する小円の中心と、その小円に外接する小円の中心を結ぶ中心線は大円と小円の接点を通らない」。このことを認識せず進めた例(この場合の誤答が極めて多かった。)

・直径と半径を混同しながら進めた例。

ある方から次のようなコメントがありました。

「受験生の娘が数学に取り組んでいる姿を見て、私も学校を卒業してから長く離れていた数学の勉強をしてみようと思いました。この問題を解くのにとても時間がかかってしまいましたが、考えている間もとても楽しく、学生の時にはわからなかった数学の楽しさをこの年になって感じています。」

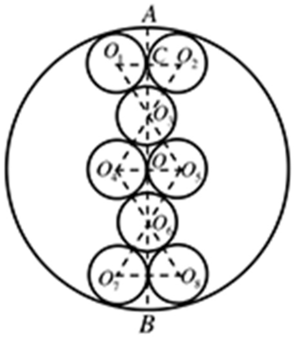
胸が熱くなる思いをしながら審査させていただきました。

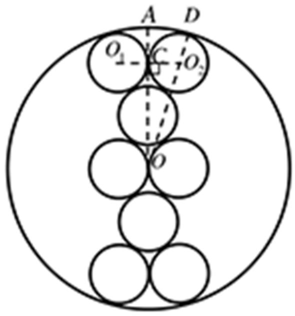
今年度も模範解答や各賞の選定には、解法ができるだけ簡潔かつ明快に展開されているものを選定させていただきました。

今後もより良い問題を提供し皆様とともに勉強すべく更に努力して参りたいと思っております。

中級　解答例

図のように，　大円の中心をO，　直径の両端をA，　B，
小円の中心をそれぞれ　O_1，　O_2，　O_3，　O_4，　O_5，　O_6，　O_7，　O_8とし，
大円の半径をR，　小円の半径をr　とおく。





図において，　$\triangle O_1O_2O_3$，　$\triangle O_3O_4O_5$，　$\triangle O_4O_5O_6$，　$\triangle O_6O_7O_8$は
一辺$2r$　の正三角形であるから,その高さは,$\sqrt{3}r$
また　$OC = 2\sqrt{3}r$(上図参照)
従って　$OO_2 = \sqrt{OC^2 + CO_2^2}$

$$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}r\right)^2 + r^2} = \sqrt{13}r$$

ここで$OD = R$　であるから

$$R = OO_2 + O_2D = \sqrt{13}r + r = \left(\sqrt{13}+1\right)r$$

$$\therefore 2R = \left(\sqrt{13}+1\right) \times 2r$$

従って$2r = \dfrac{2R}{\sqrt{13}+1} = \dfrac{25}{\sqrt{13}+1}$

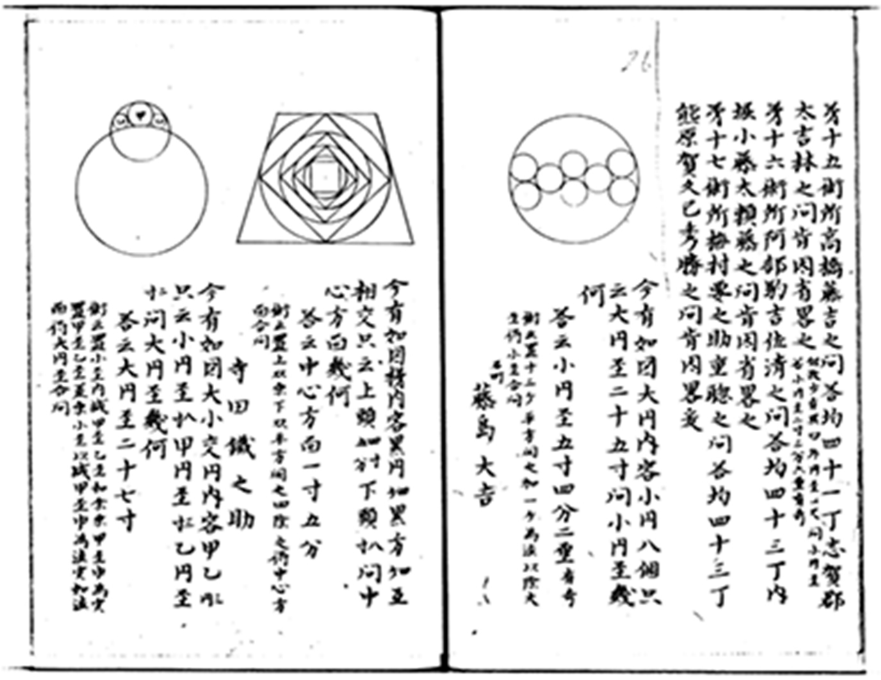
$$= \frac{25}{12}\left(\sqrt{13}-1\right)$$

$$= 5.4282\cdots$$

(答)　小円径5寸4分2厘

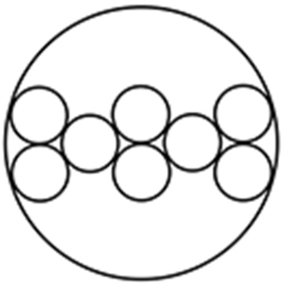
中級問題

中級問題は、岩手県盛岡市の八幡宮に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額は、現在はありませんが、盛岡の郷土史家で和算家の横川良助直胤が文化４年(1807)に著した『神壁算法追加』に記録されていることにより、文化６年(1809)８月に、志賀小左衛門の門人が奉納した20題のうちの、18問めで、石町（こくちょう）の藤島大吉が作成した問題であることがわかります。



今有如図大円内容小円八個只
云大円径二十五寸問小円径幾
何
答云小円径五寸四分二厘有奇
藤島 大吉

『神壁算法追加』東北大学附属図書館所蔵



今有如図大円内容小円八個只
云大円径二十五寸問小円径幾
何
答曰小円径五寸四分二厘有奇
術曰置十三ケ平方開之加一ケ為法以除大
径術小径合問
石町　藤島大吉

今、大円内に図の如く小円８個をいれる。ただいう大円径が２５寸、小円径は幾ばくか

答えて曰く
小円径５寸４分２厘有奇（以下続く）
(5.42・・・・寸)

術に曰く　１３を置き平方に開く、一加えて法となし、もって大円径を除く、小円径を得る

これだけでは、どのように解いたのかはわかりませんが、「術に曰く」を現代の式に表すと

$$\frac{25}{\sqrt{13}+1} = \text{小円径}$$

となり、現代の解答と一致します。