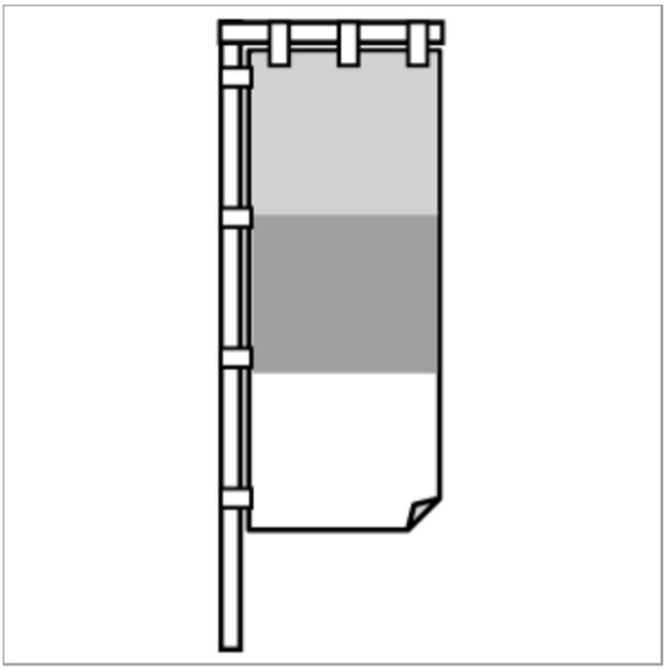
令和元年度出題問題①［初級問題］（小・中学生向き）

・文政13年（1830）刊『算法新書』の問題をもとにしました。

5種類（しゅるい）の色（いろ）で旗（はた）を染（そ）めます。
旗（はた）は3色（しょく）ですべてちがう色（いろ）を使（つか）い、順番（じゅんばん）が違（ちが）えば別（べつ）のものとします。
全部（ぜんぶ）で何通（なんとお）りの旗（はた）ができるでしょうか。



○審査員講評

今年度の初級問題は、『算法新書』巻之四の第一問目の変数（現在の順列、組合せに相当します）からの出題でした。問題を解くことによって江戸時代の和算文化の一端に触れて頂けたことと思います。
応募者の最年少は小学１年生で、幅広い年齢層の方々から応募していただきました。小学生、中学生の解答はそれぞれの学習段階に応じて解答していました。

〔小学生の解答について〕

○図や表にかき出したり、色鉛筆を使用したり、アルファベットや数字を用いて、丁寧に解法を説明しようとしていて、分かりやすい解答が多かったようです。

○５色から３色を選び出す方法が１０通り、上中下３段の並べ方が６通り、１０×６＝６０となり６０通りという考えに、５年生の児童がたどり着いていて素晴らしいと思いました。

○全体として、思考の過程が発達段階なりに工夫して表現されていました。なかにはポケモンカードという身近なものを使い思考をスタートしたが、枚数が足らずノートに書く方法に変え、答えにたどり着いたと取り組んだ様子を書いた児童もおりましたが、和算を身近なものと考えているところが素晴らしいと思いました。

○小学校６年生の２学期に「場合の数」を学習しているため、５×４×３＝６０　という計算式のみで解答しているものもありました。相手意識をもって説明するとさらによい解答となると思われます。

中学生以上の方々の多くは、数学的な説明を丁寧に正しく答えまでつなげているところが素晴らしいと感じました。また、イラストを加えたり、より分かりやすく表現している解答もみられました。団体で応募された学校の解答を審査して、多くの生徒が授業の中で鍛えられている様子がよく分かりました。
「順列・組合せ」は高等学校で学習しますが、中学生がｎＰｒを使っているのに驚きました。もちろん高校生以上の解答でも、「順列」の公式を使っていました。

複数通りもの解答を提出していただいた数学のプロと思われる方もおり、和算への熱意を感じ、毎回敬服いたします。連続受賞になった方もいます。たくさんの正解、そして優劣つけがたい正解の中から、賞に該当するものを選定することは、大変難しく、毎回のようにすばらしい解答を提出してくださる方々には心苦しいのですが、受賞歴のない方に可能なかぎり道を広げました。

学校・学年・学級で応募していただきました団体の和算に対する熱心な取り組みに対し、心から感謝申し上げます。「和算に挑戦」に多くの方に挑戦していただき、さらに和算文化について知っていただけることを願っています。

○解答例

【解答例１　　　表の利用】

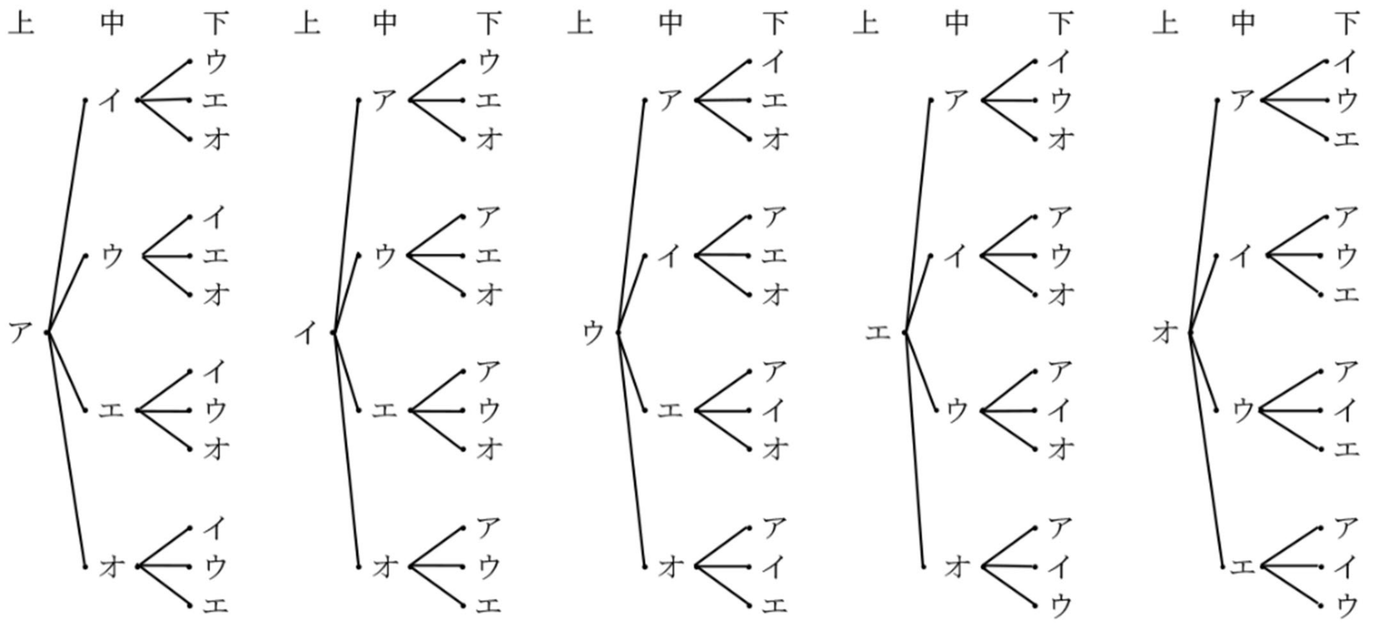
５種類の色を ア，イ，ウ，エ，オ とする。旗の上，中，下に塗る色の場合をすべてあげると，下の表のようになる。

上	中	下	通り	上	中	下	通り	上	中	下	通り	上	中	下	通り	上	中	下	通り
ア	イ	ウ	1	イ	ア	ウ	13	ウ	ア	イ	25	エ	ア	イ	37	オ	ア	イ	49
		エ	2			エ	14			エ	26			ウ	38			ウ	50
		オ	3			オ	15			オ	27			オ	39			エ	51
	ウ	イ	4		ウ	ア	16		イ	ア	28		イ	ア	40		イ	ア	52
		エ	5			エ	17			エ	29			ウ	41			ウ	53
		オ	6			オ	18			オ	30			オ	42			エ	54
	エ	イ	7		エ	ア	19		エ	ア	31		ウ	ア	43		ウ	ア	55
		ウ	8			ウ	20			イ	32			イ	44			イ	56
		オ	9			オ	21			オ	33			オ	45			エ	57
	オ	イ	10		オ	ア	22		オ	ア	34		オ	ア	46		エ	ア	58
		ウ	11			ウ	23			イ	35			イ	47			イ	59
		エ	12			エ	24			エ	36			ウ	48			ウ	60

答．　６０通り

【解答例２　　　樹形図の利用】

５種類の色を ア、イ、ウ、エ、オ とする。旗の上，中，下に塗る色の場合をすべて上げると，下の表のようになる。



答．　６０通り

【解答例３　　　順列の公式の利用】

５色から３色を選ぶ順列だから、

$_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

答.　６０通り

【解答例４　　　その他】

旗の一番上に塗る色は５通り。真ん中に塗る色は、一番上に塗った色以外の４通り。一番下に塗る色は、一番上に塗った色と真ん中に塗った色以外の３通り。したがって、

$5 \times 4 \times 3 = 60$

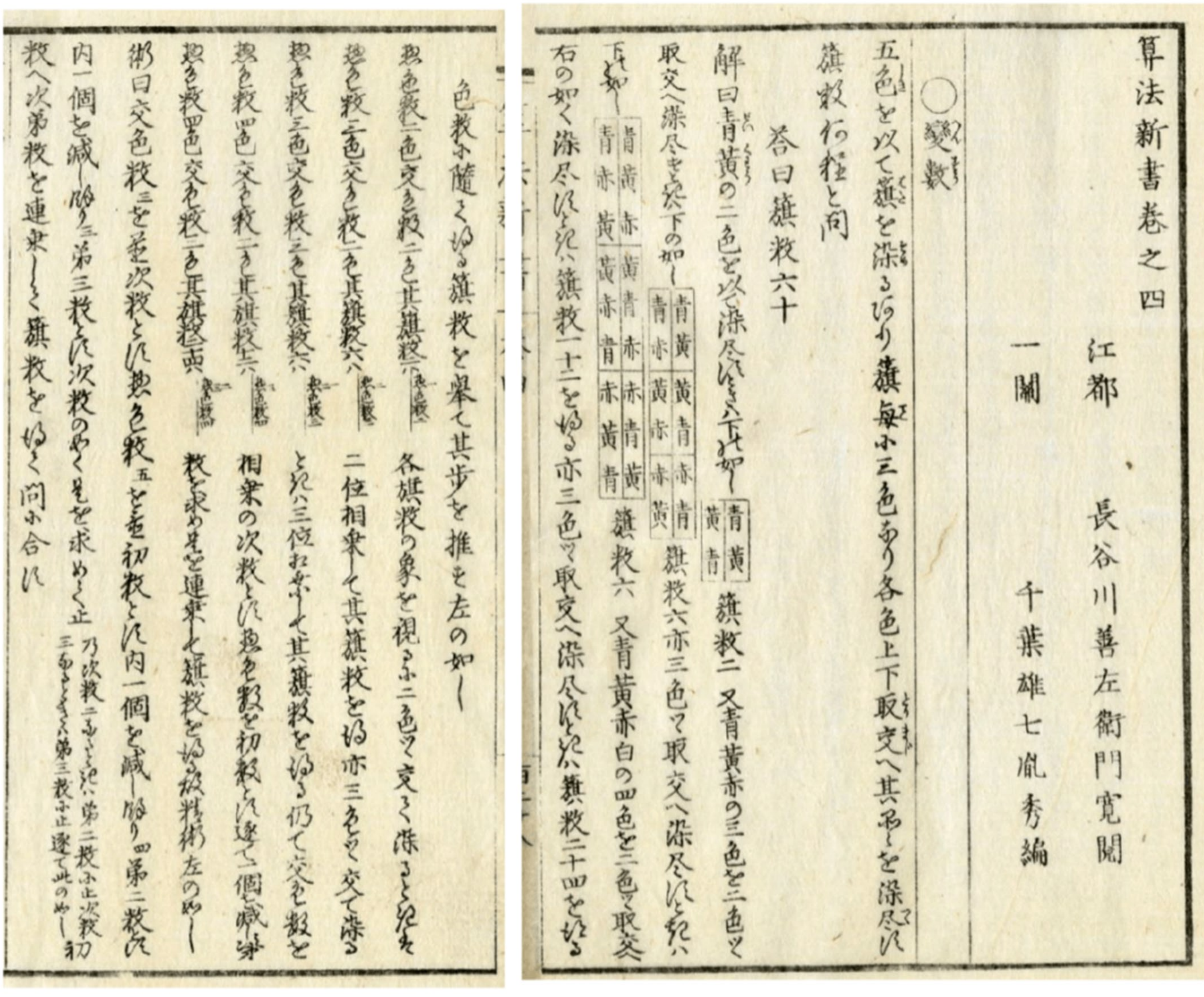
答.　６０通り

○解説

初級問題

初級問題は一関の和算家千葉胤秀が、師である江戸の長谷川寛の校閲をうけて編集し、長谷川の数学道場から発行した『算法新書』（文政１３年(1830)刊）のからの出題です。

巻之四の最初、変数（へんすう）という項目の第一問の問題です。変数は、現代でいえば順列組合せにあたる問題です。



算法新書巻之四

江都　長谷川善左衛門寛閲

一関　千葉雄七胤秀編

○變數

五色を以て旗を染るあり旗毎に三色あり各色上下取交へ其色を染尽さん

旗数何程と問

答曰　旗数六十

解曰　青黄の二色を以て染尽さは左の如し　青黄　黄青　旗数二　又青黄赤の三色を二色つゝ

取交へ染尽さんときは下の如し　青黄　青赤　黄赤　黄青　赤青　赤黄　旗数六　亦三色つゝ取交へ染尽さんときは

下の如し　青黄赤　青赤黄　黄青赤　黄赤青　赤青黄　赤黄青　旗数六　又青黄赤白の四色を二色つゝ取交

右の如く染尽さんときは旗数一十二を得る　亦三色つゝ取交へ染尽さんときは旗数二十四を得る

色数に随ひて得る旗数を挙て其歩を推せは左の如し

趣色数二色交る数二色其旗数二

趣色数三色交る数二色其旗数六

趣色数三色交る数三色其旗数六

趣色数四色交る数二色其旗数十二

趣色数四色交る数三色其旗数二十四

各旗数の象を視るに二色つゝ交て染ることを二位相乗して其旗数を得る　亦三色つゝ交て染るときは三位相乗して其旗数を得る　仍て交る数を相乗の次数とし趣色数を初数とし逐て一個宛減する数を求め是を連乗して旗数を得る故術左の如し

術曰　交色数三を並次数とし趣色数五を初数とし内一個を減し四を第二数とし

内一個を減し三を第三数とし次数のごとく是を求めて止

乃次数二ならば第二数に止　次数三ならば第三数に止　逐て此の如し

初数へ次第数を連乗して旗数を得る　問に合し

『算法新書』巻四

原文の問題と答えは、次のように書いています。

五色(しき)を以て籏(はた)を染(そめ)るあり、籏毎(ごと)に三色あり、各色上下取交(とりまじ)え其品々を染尽(つく)す、籏数何程と問 答曰　旗数六十

「答」の次の行に「解曰(解にいわく)」とあり、考え方が書かれています。おおよそ次のように述べられています。

青黄の二色をもって染めるときは、次のようになる。

青	黄
黄	青

旗の数は２（通り）。

また、青黄赤の３色を２色ずつで染めるときは下のようになる。

青　黄	黄　青	赤　青
青　赤	黄　赤	赤　黄

旗の数は６。

また、３色ずつで染めるときは下のようになる。

青　黄　赤	黄　青　岡	赤　青　黄
青　赤　黄	黄　赤　青	赤　黄　青

旗の数は６。

また、青黄赤白の４色から２色で染めるときは旗の数は、１２となり、３色ずつで染めるときは、旗の数は２４となる。

以上をふまえて、全体の色の数と染める色の数、旗の数の関係を考えると

２色から２色のとき、旗の数は２　　　２×１
３色から２色のとき、旗の数は６　　　３×１
３色から３色のとき、旗の数は６　　　３×２×１
４色から２色のとき、旗の数は１２　　４×３
４色から３色のとき、旗の数は２４　　４×３×２

２色ずつで染める時は2位（２つの数）をかけて旗の数を得て、３色ずつで染めるときは、３位をかけて旗の数を得る。

したがって、全体の色の数を初数（はじめの数）として、１ずつ引いた数を、染める色の数だけかければ旗の数をえる。

次に「術日（術にいわく）」として、この問題の場合の解法をまとめています。
染める数３をおいて「次数」とする。
全体の色の数　５　を置き、「初数」とする。
内　１　を引き、残りの　４　を「第２数」とする。
内　１　を引き、残りの　３　を「第３数」とする。「次数」となるので、ここで止める。
「初数」へ「第〇数」を連乗して（次々にかけて）旗の数を得て、問いに合う。

つまり、５×４×３＝６０　として求めています。
順序だてて考えて一般的に求める方法をみちびいています。独りでも和算を学べるようにという『算法新書』の編集方針がうかがえる記述になっています。