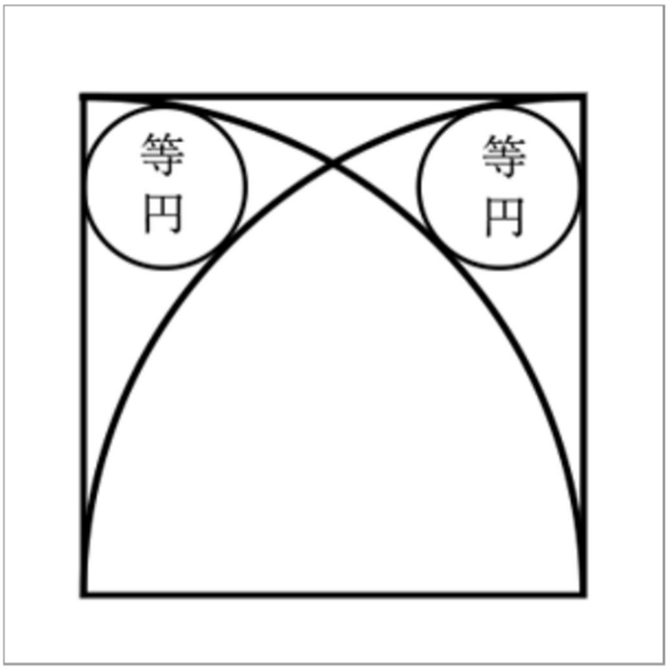
令和元年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県一関市の菅原神社に嘉永3年（1850）に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、正方形の内部に、正方形の1辺の長さを半径とする2つの四分円があります。
この四分円の一方に内接し、他方に外接し、さらに正方形の1辺に接する2つの等円（半径が等しい円）があります。
等円の直径が1寸のとき、正方形の1辺の長さを求めなさい。



○審査員講評

一関市の菅原神社算額からの出題でした。応募数は３４９通と例年に比べて少なめでした。美しい図形で題意は明瞭なのですが、図形的な性質の理解がやや難しかったのかと思います。そのためか正解率もやや低くなりました。

２円が接するとき、２円の中心線上に接点があります。この問題では四分円の半径が正方形の１辺になります。半径を未知数として三平方の定理を使用して方程式を２つ導きます。最終的には小円の半径を定数として、四分円半径の１次方程式になります。これに小円の直径１を代入すればよいのです。

正解者の大半はこの性質を利用していました。方程式を導く際に利用する図形は、(ア)右側、(イ)左側、思いつきにくい考えにくい(ウ)上部と３通りになりました。(ウ)は高校生に見られました。着想の鋭さを感じました。解答者の個性が分かれる点でした。

また、初等的図形の性質からの解答者もいました。この種の解答はユニークで予想していない解答でした。しかし説明不足の解答が多く、物足りなく感じました。
以下、採点しての印象を記載します。

（１）　問題（図形）が簡明すぎるためか誤った直観で結論を導いた誤答が多い。
（２）　筋道をたてて述べる過程が不十分で誤答となる答案が多い。
（３）　問題では、直径を１としましたが、半径１として１辺を６と誤答した残念な答案が多かった。
（４）　十分条件のみを記載した解答があった。

中級問題は、中学生にも解答可能な出題を心がけています。しかしながら、「和算に挑戦」の立場かどうしても初等幾何の性質や一般の２次方程式の解法が必要に成りがちです。そのため中学生にはやや程度が高くなります。そのためか今回は残念ながら解答者数が減少しました。しかし、解答された方は和算を十分に楽しまれたと思います。

低学年の生徒には、題意の理解に先生方やご家族の助言も必要かと思います。未知の公式が必要であれば、自分で調べて学ぶとか先生や両親に尋ねるとかして、解答に挑戦して欲しいものです。

なお和算では特殊な用法や用語があります。私達の数学では、問題は半径で与えられますが、和算では、半径が与えられることはありません。直径の値が与えられます。

次回も岩手の算額や和算書からの出題を予定しています。

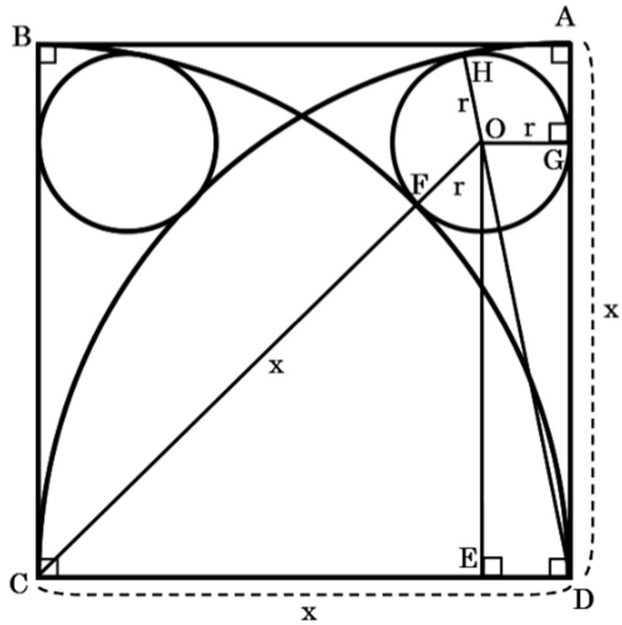
たくさんの投稿をお待ち申し上げます。

○解答例

【解答例】

等円の半径をｒ寸，正方形の１辺をｘ寸とする。
直角三角形ＯＥＣに三平方の定理を用いると

$$OE^2 = OC^2 - CE^2$$
$$= (CF + FO)^2 - (CD - DE)^2$$
$$= (x + r)^2 - (x - r)^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$



直角三角形ＯＧＤに三平方の定理を用いると

$$GD^2 = OD^2 - OG^2$$
$$= (DH - OH)^2 - OG^2$$
$$= (x - r)^2 - r^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ＯＥ＝ＧＤ，①，②　より

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = (x - r)^2 - r^2$$
$$x^2 - 6rx = 0$$
$$x(x - 6r) = 0$$

$x \neq 0$より

$$x = 6r$$

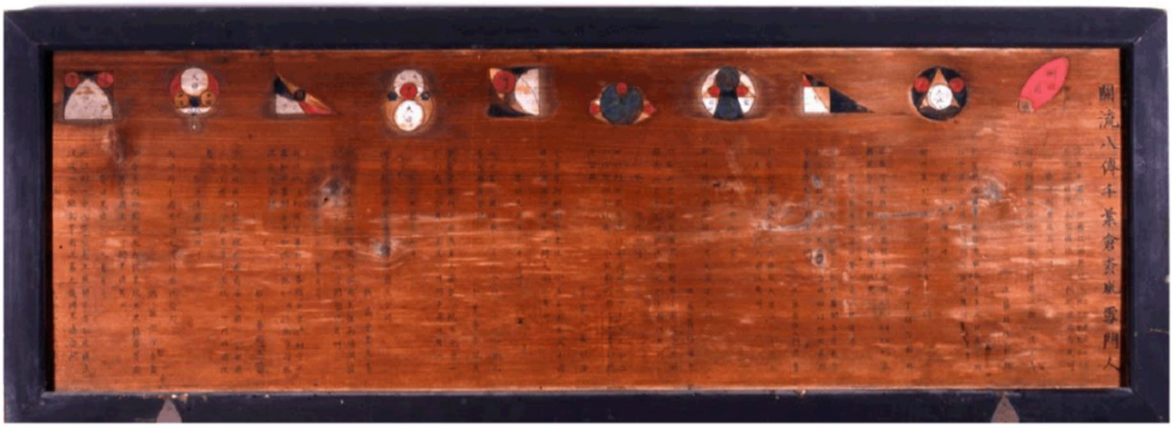
$2r = 1$であるから

$x = 3 \times 2r = 3 \times 1 = 3$　　　答．３寸

中級問題

中級問題は、岩手県一関市舞川の菅原神社に嘉永３年(1850) ２月 25 日に奉納された算額の問題をもとにしました。菅原神社は、学問の神様として信仰をあつめ、算額も３面奉納されています。この問題のある算額は、関流８伝の千葉倉松門人 20 名が、１人１題を 10 問ずつ２枚に分けて奉納したもので、２枚１組の算額です。

この問題は、算額の最後 10 問めにあり、渋谷正右衛門直光によるものです。算額では、黒い部分の面積を求める問題でしたが、辺の長さを求めるものに変更して出題しました。



嘉永３年奉納 菅原神社算額 60×166 ㎝

今有方内如図従左右設象限画黒積容等円二個
其等円径一寸問黒積幾何
答曰黒積三分九厘有奇
術曰列一分八厘七毛五糸開平方加球積法以減
一个余乗等円径冪九段得黒積合問
渋谷正右衛門直光

《現代訳》

今、図のように正方形内の左右に象限（四分円）を設けて等円を２個いれる。等円の直径が１寸のとき黒積はいくらか。

答えて曰く　黒積は０.３９････

術に曰く

１.８７５を平方に開き、球積法を加え１を減じ、残りに等円径の冪（２乗）をかけ９をかけると黒積を得て問に合う

和算家が、この算額の解法を書いた『相川天神社神壁解』と題したノートがあります。

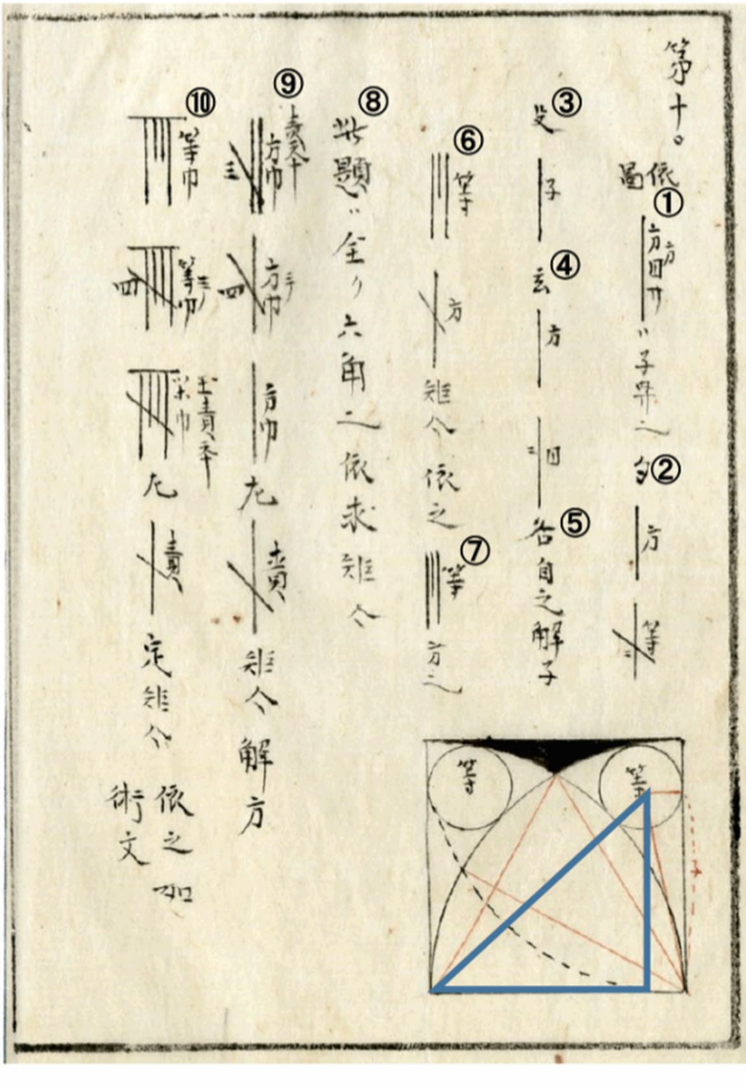
これは、下記のような点竄術や傍書法（ぼうしょほう）という関孝和が考案した式の表現によって書いています。

点竄術による式の表現

現代の式

甲＋乙	甲－乙	甲×乙	甲÷乙

点竄術



『相川天神社神壁解』

◎使用している用語

方：正方形の一辺の長さ

円：円の直径

等：等円の直径

巾（冪の略）：２乗

勺、殳（股の略）、玄(弦の略)：

勺股弦は直角三角形のことで、勺・股・弦は、それぞれ短辺・長辺・斜辺のこと。

子：十二支の子。和算では記号として十二支を用いることがある。

矩合：等式を差し引き０となる式

責：面積

責率：面積を求める時の定数。

この場合は直径１の円の面積を求める時の定数。 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi}{4}$

玉積率：直径１の球の体積を求める時の定数。 $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\pi=\frac{\pi}{6}$

球積法ともいう

文末に頻出する は「也」のくずし字。

写真に付した番号にしたがって、現代的に解いてみます。

図に依り

① $方(方-円)=子^{2}$　　※この円は、等円のこと

子と等円を２辺とする直角三角形で

$$\left(方-\frac{等円}{2}\right)^{2}=子^{2}+\left(\frac{等円}{2}\right)^{2}$$ が成り立つから　①となる

太線の直角三角形において　② $勺=方-\frac{等}{2}$　③ $殳=子$　④ $方+\frac{等}{2}$　だから

⑤ おのおのこれを自（２乗）し、子を解く

三平方の定理より　$④^{2}=②^{2}+③^{2}=②^{2}+①$

$$\left(方+\frac{等}{2}\right)^{2}=\left(方-\frac{等}{2}\right)^{2}+方(方-等円)$$

$$方^{2}=3方\cdot等$$

⑥ $3等-方=0$

これにより　⑦ $方=3等$　　である。　※ここで、今回の中級問題の解がでます。

⑧ この題は、全く六角也、矩合を求める

「六角」とは、四分円の交点と正方形の下の辺を結ぶ三角形が正三角形で、六角形の$\frac{1}{6}$であることを示している。正六角形の面積を求めるのに一辺の自乗にかける数

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を六角法と呼んでいる。

⑨ $-2\frac{方^{2}\cdot責率}{3}-\frac{方^{2}\sqrt{3}}{4}+方^{2}-責=0$　この式は、正方形、方を半径とする円の$\frac{1}{6}$と、正三角形、黒責に分割した場合の面積を表している。

⑩ $9等^{2}-9\frac{等^{2}\sqrt{3}}{4}-9等^{2}(玉積率)-責=0$

⑨の方を解く　　方＝３等より　　⑨は

$$-2\frac{9等^{2}\cdot責率}{3}-9\frac{\sqrt{3}}{4}等^{2}+9等^{2}-責=9等^{2}-9\frac{\sqrt{3}}{4}等^{2}-9等\cdot\frac{2}{3}\cdot責率=0$$

$\frac{2}{3}\cdot責率$　すなわち　$\frac{\pi}{6}$　は、円責率(球積法)　なので⑩になる

等＝１とすると　$責=9\times\left(1-\sqrt{\frac{3}{16}}-円積率\right)=9\times\left(1-\sqrt{0.1875}-球積法\right)$

$$=9\times(1-0.4330-0.5236)=0.3906$$

となり、算額の術文と答え０．３９…と合う。