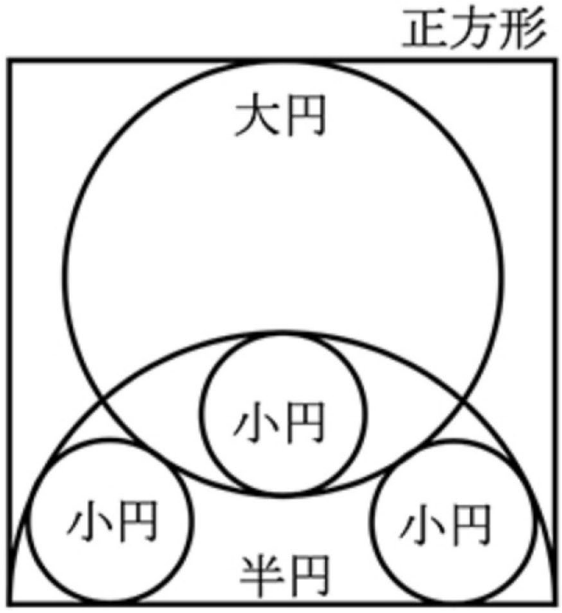
令和3年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県平泉町の中尊寺阿弥陀堂に弘化2年(1845)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように、半円の直径が正方形の一辺で、その対辺に大円が接しています。3つの小円は半円の弧に内接し、2つの小円は半円の直径にも接し、1つの小円は大円にも内接しています。半円の中心、大円の中心、大円に内接する小円の中心は、一直線上にあります。

小円の直径が3寸のとき、大円の直径を求めて下さい。



審査員講評

今回も、精魂こめた力作の「解」を多数寄せられ、ありがとうございます。

図示された問題は、きれいな対称形になっており、一見取り組み易さを感じますが、問題文をよく読み込み、先入観なしに対応しないと、いろんな場面が確定され、解に至る道筋が意外と複雑化する恐れがあります。この点については２、３人の方々からもご指摘がありました。作題（問題の選定）に際しての、今後配慮すべき事柄でした。

具体的な今回の状況を概観してみます。

・「解」を寄せてくれた人々は、例年より若干少な目で、年齢層もその幅がせまくなったようでした。中国の蘇州の日本人学校よりの応募が新たに加わりました。

・「解」をすすめるに際しては、

　・正方形との関係をどう処理するか

　・補助線（一直線上にある）の活用

　・対称とみなせる図形の扱い

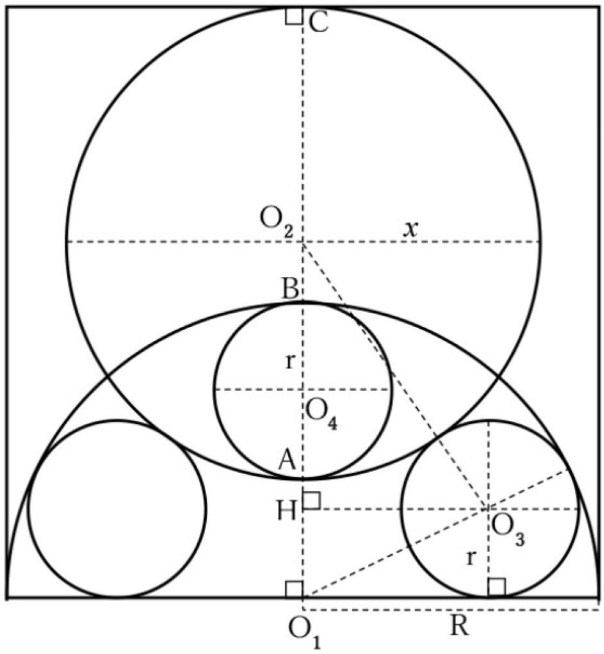
を主たる軸に進めたものが多くあり、最終的には「三平方の定理」の利用が最短の近道だったようです。

・図形の処理にカラーペンを使用し、彩色して論理を明確化する補助としてすすめた方がありました。このような解に接すると本当に楽しく、心がなごみました。

更に、自分の「解」を作るために、最初に箇条書きで方向性を提示し、それに基づき、乱れることなく「解」を展開した方もあり、学術論文の一端を垣間見た爽快さを感じました。

「問題を考案した人のセンスの良さを実感しました」と感想を寄せてくれた方の文で締めとします。

解答例



右図のように，半円 $O_1(R)$，大円 $O_2(x)$，小円 $O_3(r)$，$O_4(r)$ とする。

$O_1B = BC = AC - AB$ より

$R = 2x - 2r$ ・・・・・①

直角三角形 O_1HO_3 に三平方の定理を用いて，

$HO_3{}^2 = O_1O_3{}^2 - O_1H^2$

$HO_3{}^2 = (R-r)^2 - r^2$

$HO_3{}^2 = R^2 - 2Rr$ ・・・・・②

直角三角形 O_2HO_3 に三平方の定理を用いて，

$HO_3{}^2 = O_2O_3{}^2 - O_2H^2$

$HO_3{}^2 = \left(x+r\right)^2 - \left\{2R - \left(x+r\right)\right\}^2$

$HO_3{}^2 = -4R^2 + 4Rx + 4Rr$ ・・・・・③

②③より

$R^2 - 2Rr = -4R^2 + 4Rx + 4Rr$

$5R^2 - 4Rx - 6Rr = 0$

両辺を $R(\neq 0)$ で割ると，

$5R - 4x - 6r = 0$

①を代入して，

$5(2x - 2r) - 4x - 6r = 0$

$6x = 16r$

$x = \dfrac{8r}{3}$ ・・・・・④

したがって，

$$\left(\text{大円の直径}\right) = 2x = 2 \times \frac{8r}{3} = \frac{2r \times 8}{3} = \frac{\left(\text{小円の直径}\right) \times 8}{3} = \frac{3 \times 8}{3} = 8$$

答　8寸

【参考】　$2r = 3$，$2x = 8$ と ① を用いると，

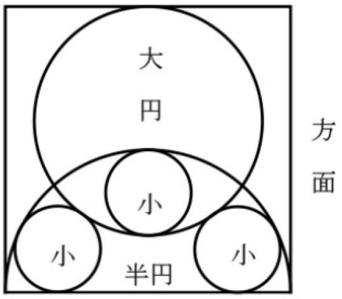
$\left(\text{正方形の１辺}\right) = \left(\text{半円の直径}\right) = 2R = 2(2x - 2r) = 2 \times (8 - 3) = 10$

まとめると，

（小円の直径）＝３寸，（大円の直径）＝８寸，（正方形の１辺）＝(半円の直径）＝１０寸

○解説

　中級問題は、岩手県平泉町の中尊寺境内にある阿弥陀堂に弘化２年(1845) ４月４日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額には４題の問題がありますが、千葉胤秀やその高弟の安倍保定の門人など、一関の和算家によるものです。今回の問題は、その２番目、阿部佐一郎の問題で、原文は以下のようになります。



関流八伝　安倍保定門人
今有方内如図設半円容大円及小円三個其小円
径三寸問大円径幾何
答曰大円径八寸
術曰置小円径八因三除之得大円径合問

《現代訳》

今、正方形の中に図のように半円を設け、大円、小円３個をいれる。小円の直径が３寸の時、大円の直径はいくらか。

　答えて曰く　大円の直径は８寸

術に曰く

　小円の直径を置き８をかけ３でわると大円の直径となり、問いに合う

　算額の「術曰」は答えが出る直前の式を書いているだけで、どのようにしてここに至ったかは不明ですが、解答例の式と一致しています。