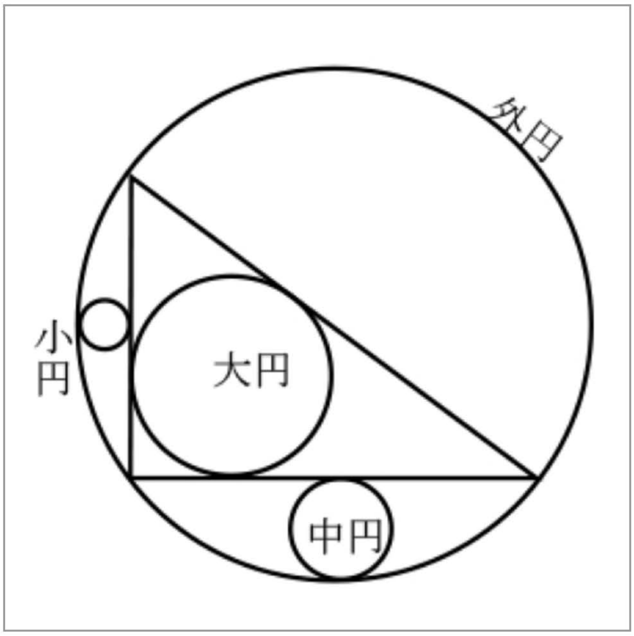
令和4年度出題問題②［中級問題］（中学・高校生向き）

・岩手県花巻市の清水寺に嘉永3年(1850)に奉納された算額の問題をもとにしました。

図のように外円に内接する直角三角形に大円が内接しています。中円、小円は外円に内接し、直角三角形の直角をはさむ2辺のそれぞれの中点で接しています。

中円の直径が2寸、小円の直径が1寸の時、大円の直径を求めなさい。



○審査員講評

今回中級に挑戦された方々は、例年よりやや少なめの人数でした。提示された図は、シンプルでよりどころが多くあり、このため取り組みやすかったようです。それだけに、少数精鋭そのもので、どの解もすばらしいものばかりでした。当然、誤答や無答に近いものは、ごく少数にとどまりました。

いろんな書物に、今回と同種の問題が、解説を含めて示されていたようですが、『算法助術』という公式集にも、かかわりのある利用可能な部分が何ケ所かありました。しかし応募された大多数の方々は、自分の考えで論を見事に進めており、大変すばらしく感じました。問題図の中にどんな関係が隠されているかを見つけることで、解答につなげるという姿勢も強く感じとりました。

解法の進め方で多かったのは、大筋として以下の２つでした。

① 直角三角形より、外円の半径、そして三角形の三辺を求める。

② 大円と直角三角形の関係を利用する(簡単な定理がある)。

事務局の解答例もこれに沿ったものです。

余裕綽々として、解に関連した事柄を更に検討してまとめた方もありました。

例えば

（ァ）直角三角形の三辺の長さの比(整数)と大円の直径(三辺の長さで表示)との関連を調べ、一つの方向性を見出した。

（イ）エクセルを使用し「図形の中に潜む数の世界の楽しみ」を一気に飛び越し、解にストレートに迫った。そして、大、中、小円の径をいろいろ変化させたものを調べ、検討を加えた。

「美しい図形にはどんなきれいな解を対応させるか」という枠組は、先人が苦労した道筋でもあり、「作題」する事に目を向けた場合、もしかして、エクセルを使用することが有効なのではないかという感じがしました。

今回の問題は、岩手県花巻市の清水寺の２面の算額、19 問の中の１つでしたが、この中には総合的な知識を要する良問が多くあります。

最後に、中級の問題を解いての感想が寄せられていますので、その２～３を紹介します。

① こんな多種の取り組みが可能な問題に接すると、和算の奥深さを更に感じさせられます。

② 数学との邂逅に感謝。

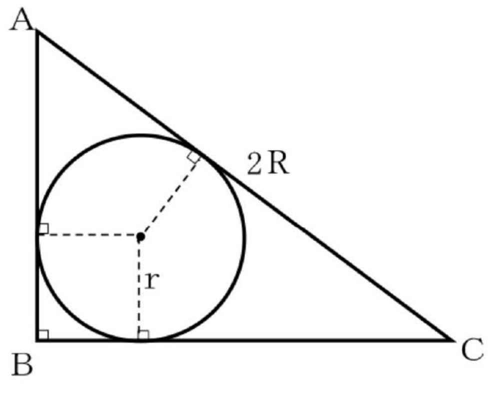
③ 道筋がはっきりしておれば、解へ至る道のりの長短は問題ではなく、大変楽しかった。

④ 去年今年(こぞことし)につないでくれる和算かな

○解答例

外円，大円，中円，小円のそれぞれの半径を，R，ｒ，r_1，r_2とする。
外円に内接する直角三角形ＡＢＣの斜辺ＡＣは，外円の直径である。

ｒは直角三角形ＡＢの内接円であるから



$$r = \frac{AB + BC - CA}{2}$$

$$r = \frac{(2R - 4r_1) + (2R - 4r_2) - 2R}{2}$$

$$r = R - 2(r_1 + r_2) > 0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$R = r + 2(r_1 + r_2)$$

三平方の定理より，

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$(2R - 4r_1)^2 + (2R - 4r_2)^2 = (2R)^2$$

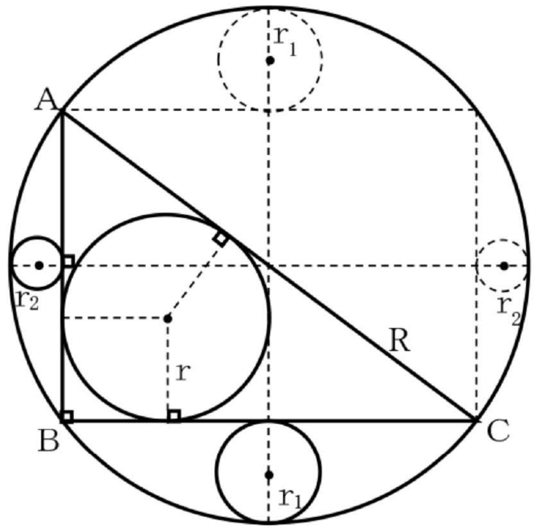
$$(R - 2r_1)^2 + (R - 2r_2)^2 = R^2$$

$$R^2 - 4(r_1 + r_2)R + 4(r_1{}^2 + r_2{}^2) = 0$$

２次方程式の解の公式により，

$$R = 2(r_1 + r_2) \pm \sqrt{\{2(r_1 + r_2)\}^2 - 4(r_1{}^2 + r_2{}^2)}$$

$$= 2(r_1 + r_2) \pm 2\sqrt{2r_1r_2}$$



①より　$R > 2r_1 + 2r_2$だから

$$R = 2(r_1 + r_2) + 2\sqrt{2r_1r_2}$$

$$R - 2(r_1 + r_2) = 2\sqrt{2r_1r_2}$$

①より　$r = 2\sqrt{2r_1r_2}$

$r_1 = 1$，$r_2 = \dfrac{1}{2}$を代入すると

$$r = 2\sqrt{2 \times 1 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

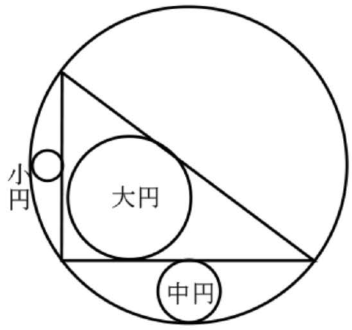
したがって，　$(\text{大円の直径}) = 2r = 2 \times 2 = 4$

答　４寸

参考　　　直角三角形ＡＢＣの三辺の長さは　ＡＢ＝３（寸），ＢＣ＝４（寸），ＣＡ＝５（寸）となります。

解説

中級問題は、岩手県花巻市の清水寺に嘉永３年(1850) ７月 10 日に奉納された算額の問題をもとにしました。この算額には４題の問題がありますが、関流算学師　藤葉軒和重門人４名の問題が納められています。今回の問題は、その４番目、和賀郡藤根村(現在の岩手県北上市)の髙橋峯蔵の問題で、原文は以下のようになります。



図如円之内鈎股設大中小之円容其中円径二寸
小円径一寸大円径問
答曰大円径四寸
術曰中円径置四乗メ八寸得子小円径倍メ子乗
メ是平方開大円得

《現代訳》

図のように円の中に直角三角形を設け、大中小の円を容れる。中円の直径が２寸、小円の直径が１寸の時、大円の直径はいくらか

答えて曰く　大円の直径は４寸

術に曰く

中円の直径を置き４をかけ８寸を得る。小円の直径を倍にしてかけ、これ(16)を平方に開き大円の直径を得る

算額の「術曰」は答えが出る直前の式を書いているだけで、どのようにしてここに至ったかは不明ですが、解答例の式と一致しています。