令和6年度出題問題①［初級問題］（小・中学生向き）

・『算法便覧』(文政9年(1826)刊)の問題をもとにしました。

正月が近づき、甲と乙の2軒の「かまぼこ屋」は大忙しです。

ある日、甲は、かまぼこを29個作りました。乙は、この日の4日前に、9個作りました。甲も乙も毎日、前日よりも4個ずつ多く作っていきます。甲と乙、それぞれが作ったかまぼこの合計が等しくなるのは、何日目ですか。

※「ある日」を1日目とします。

○審査員講評

文政９(1826)年に刊行された武田真元の『算法便覧』からの出題でした。この書には正月から１２月までの年中行事に関する問題等が記載されています。

題意を理解し、数えれば小学生低学年でも解答可能と考えて出題しました。しかし、採点した印象では題意の把握が難しかったようです。また「ある日」を１２月１日とするなど文章表現をわかりやすく工夫して欲しいとの要望がありました。紙面の字数制約がありますができる限り努力します。

投稿者は題意の把握に難儀しながらも「問題の構造を把握し、論理的に解答」していました。解答は大きくは二つに分けられました。

1．表にまとめて解答する。ここで大半の方が終了していました。

2．表により答えを求め、さらに

ア　これを簡単な数式で説明しながら解答を記述する。

イ　甲乙の作る総数を数列の和として表現し数列により求める。

ウ　その他に少数でしたが、面積を求めるように図で考えて求める。

具体的に解説を加えると、多数の方は以下のように解答していました。

1．表により答えを求める。この表は横書きと縦書きの２通りがありました。

全体の把握には縦書きが見やすく良かったようです。

2．これから、解答を考える。

甲は、はじめて２９個作った。

乙は、４日前に９個作り、３日前に９＋４＝１３個、２日前に９＋４＋４＝１７個、１日目に９＋４＋４＋４＋４＝２５個作ったので、甲が２９個作るまでに、乙は、９＋１３＋１７＋２１＋２５＝８５個を作っている。

ある日の差は８５－２９＝５６個、甲は乙より４個ずつ多く作ることになるので

５６÷４＝１４

ある日を１日とするので、答は１４＋１＝１５日

誤答の多くは「・・・・・５６÷４＝１４日」とある日を加えないものでした。

数列で総数から求める解答は解答例３に記載したのでご覧ください。

正解者の解答は、「題意を把握」→「それぞれ自分の考えで順序良く文章や表で記述」→「式と結び付けながら計算」→「答に到達」としていました。

きちんと思考や整理された表現の答案に触れ採点者一同楽しい時間でした。採点に戸惑い悩みながらも、感激する素晴らしい解答投稿を次年度もお待ち申し上げます。

○解答例

【解答例 1】

ある日
↓

日目					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**
甲　個数	0	0	0	0	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85
甲　合計の個数	0	0	0	0	29	62	99	140	185	234	287	344	405	470	539	612	689	770	**855**
乙　個数	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81
乙　合計の個数	9	22	39	60	85	114	147	184	225	270	319	372	429	490	555	624	697	774	**855**

答　１５日目

【解答例 2】

ある日
↓

日目					1	2	3	4	5	…
甲が作るかまぼこの個数	0	0	0	0	29	33	37	41	45	…
甲が作るかまぼこの個数の合計（ア）	0	0	0	0	29	62	99	140	185	…
乙が作るかまぼこの個数	9	13	17	21	25	29	33	37	41	…
乙が作るかまぼこの個数の合計（イ）	9	22	39	60	85	114	147	184	225	…
（イ）－（ア）	9	22	39	**60**	**56**	**52**	**48**	**44**	**40**	…

４ずつ減っていく

６０÷４＝１５

「ある日」を１日目としているから，１５日目に（イ）－（ア）＝０　となる。

答　１５日目

【解答例３】 等差数列の和の公式（高等学校で学習します。）の利用

> 初項 a，公差 d，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
>
> $$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

	４日				ある日 ↓					
日目					1	2	3	⋯	n	⋯
甲が作るかまぼこの個数					29	33	37	⋯	$29 + (n-1)\cdot 4$	⋯
甲が作るかまぼこの個数の合計					29	62	99	⋯	$\frac{1}{2}\cdot n\cdot\{2\cdot 29 + (n-1)\cdot 4\}$	⋯
乙が作るかまぼこの個数	9	13	17	21	25	29	33	⋯	$9 + (n+3)\cdot 4$	⋯
乙が作るかまぼこの個数の合計	9	22	39	60	85	114	147	⋯	$\frac{1}{2}\cdot(n+4)\cdot\{2\cdot 9 + (n+3)\cdot 4\}$	⋯

n 日目にかまぼこの個数の合計が等しくなるとすると

（甲が作るかまぼこの個数の合計）＝（店が作るかまぼこの個数の合計）　より

$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot\{2\cdot 29 + (n-1)\cdot 4\} = \frac{1}{2}\cdot(n+4)\cdot\{2\cdot 9 + (n+3)\cdot 4\}$$

$$n\cdot(4n+54) = (n+4)\cdot(4n+30)$$

$$n\cdot(2n+27) = (n+4)\cdot(2n+15)$$

$$2n^2 + 27n = 2n^2 + 23n + 60$$

$$4n = 60$$

$$n = 15$$

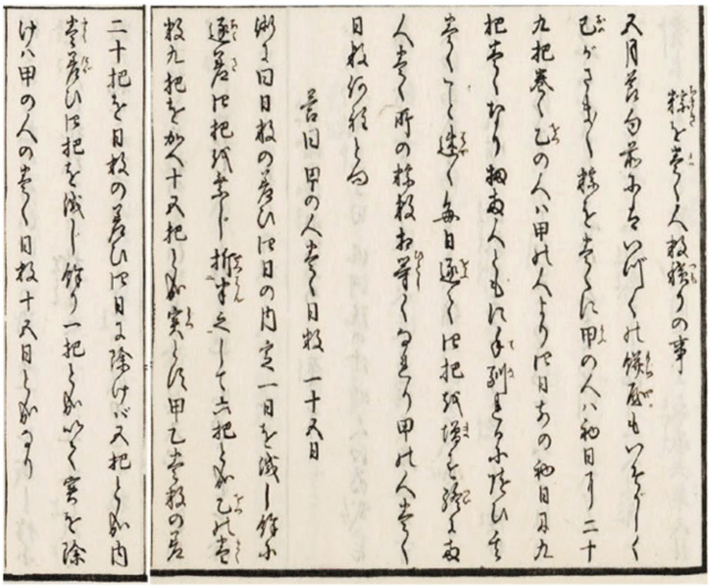
答　１５日目

○解説

初級問題は、大坂出身の武田真元が文政９年(1826)に出版した『算法便覧』の問題をもとにしました。武田真元の和算は「武田流」とも「真元流」とも称し多くの人に学ばれました。

この本は１０巻からなりますが、三、四は「年中篇」として年中行事に関わる問題となっています。今回の問題は、五月の行事の粽作りを、正月のかまぼこに変えて出題しました。

原本は以下の通りです。



画像:京都大学附属図書館所蔵(部分)

粽を巻く人数積りの事
五月節句前には節句の餅屋もいそがしく
己がさまざま粽を巻くに、甲の人は初日に二十
九把巻く、乙の人は甲の人より四日前の初日に九
把巻くなり、扨両人ともに手馴れるに従い其
巻くこと速く毎日逐て四把を増す、終に両
人巻く所の粽数相等くなれり、甲の人巻く
日数何程と問
答曰　甲の人巻く日数　一十五日
術に曰、日数の差ひ四日の内定一日を減じ余に
逐差四把を乗じ之を折半して六把と成、乙の巻
数九把を加へ十五把と成、実とす、甲乙巻数の差
二十把を日数の差ひ四日に除けば五把と成、内
巻差ひ四把を減じ余り一把と成、以って実を除
けは甲の人の巻く日数十五日と成なり

○「術に曰」以下を、説明します。

甲、乙の粽の数は以下のようになります。

乙　９，１３，１７，２１，２５，２９，３３、３７・・・・・・
甲　　　　　　　　　　　　２９、３３，３７，４１、・・・・・

術の式を現代風に表すと

（日数の差４日－１日）×公差４個÷２＝６個

∴　（乙の初項９個）＋６個＝１５個・・・・・実　　これに要する日数を計算する。

また甲－乙の初項の差＝２９-９＝２０個

４日間で２０個の差を埋めるには２０個÷４日＝$\frac{5個}{1日}$

毎日生まれる差は$\frac{5個}{1日}-\frac{4個}{1日}=\frac{1個}{1日}$　　∴　１５個÷$\frac{1個}{1日}$＝１５個×$\frac{1日}{1個}$＝１５日

この問題は個数と日数が関連した問題で、和算では一般的な問題です。そして真元の解答は個数と日数を分け、個数を計算してから日数の答を得ています。現代からみると特殊な考えですが、真元も私達と同様に単純に題意に従って日数と個数を数える解答を経て「術」の解に到達したと思われます。